Petit mémo de théorie des ensembles

Emmanuel Pedon
Université de Reims

Certaines notions mathématiques fondamentales sont traditionnellement peu étudiées dans un parcours universitaire. Leur abstraction les rend en effet difficiles à enseigner pour soi, ce sont plutôt des outils qu'on voit apparaître au fur et à mesure de leur besoin.

Il m'a semblé utile de rassembler ces fondements épars dans un court texte, probablement un peu indigeste car conçu comme un aide-mémoire commenté, et non comme un cours.

La plupart des résultats énoncés ici constituent de bons exercices, parfois abstraits mais plutôt faciles.

1 Relations sur un ensemble

Ici le prérequis est simplement la notion d'ensemble, de sous-ensemble (ou partie), d'inclusion, de réunion et d'intersection.

Définition. Soient E, F deux ensembles. On appelle **relation** de E dans F la donnée d'une partie Γ de $E \times F$. On dira alors que x **est en relation avec** y (dans cet ordre), et on notera $x\mathcal{R}y$, si $(x, y) \in \Gamma$. L'ensemble Γ s'appelle **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Un autre point de vue consiste à penser une relation de E dans F comme une application $\mathcal{R}$ de $E \times F$ dans l'ensemble {VRAI, FAUX}. On dira que x et y (dans cet ordre) vérifient $\mathcal{R}$ et on note $x\mathcal{R}y$ lorsque $\mathcal{R}(x, y)$ =VRAI. C'est plus intuitif, mais en fait pas très rigoureux puisqu'on fait appel à la notion d'application, qui est justement définie à partir de la notion de relation ! (voir plus loin)

Définition. Lorsque $E = F$, on dit que la relation $\mathcal{R}$ est **binaire**. Pour simplifier, on dira simplement que $\mathcal{R}$ est une relation sur E (ou dans E).

Dans la suite de ce paragraphe, nous ne considérons que des relations de ce type.

Exemples.

1) $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ est la relation $=$ ou $\leq$.
2) $E = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ est la relation de divisibilité.
3) E est l'ensemble des droites d'un espace affine, $\mathcal{R}$ est la relation de parallélisme.

Définitions. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite :

- **réflexive** si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$;
- **symétrique** si : $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- **antisymétrique** si : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$;
- **transitive** si : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemple. Dans $\mathbb{Z}$ la relation $\leq$ est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.

Version du 16 septembre 2009. Texte accessible sur le site `http://pedon.perso.math.cnrs.fr/enseignement.html`

Définitions. Lorsqu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est à la fois réflexive, symétrique et transitive, on dit que c'est une **relation d'équivalence**.
Si $x \in E$, on appelle alors **classe d'équivalence (modulo $\mathcal{R}$) de x** l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}$$

de tous les éléments en relation avec x. Les éléments de $\mathrm{cl}(x)$ sont appelés **représentants** de $\mathrm{cl}(x)$.
Enfin, on appelle **ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$, et on note $E/\mathcal{R}$, l'ensemble de toutes les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$:

$$E/\mathcal{R} = \{\mathrm{cl}(x),\ x \in E\}.$$

(C'est donc un ensemble d'ensembles.)

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{Z}$ la relation de congruence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow n \mid y - x$ est une relation d'équivalence. Les classes sont du type

$$\mathrm{cl}(x) = \{x + kn,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

et l'ensemble quotient, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, contient n éléments et peut être muni d'une structure d'anneau commutatif.

Proposition. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*

1) $\forall x \in E$, $\mathrm{cl}(x) \neq \varnothing$;
2) $\forall x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}(y) \Leftrightarrow y \in \mathrm{cl}(x) \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$;
3) $\forall x, y \in E$, $x \not\mathcal{R} y \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$;
4) *L'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ induit une partition de E, i.e. E est la réunion disjointe de ses classes modulo $\mathcal{R}$.*

Remarque. D'après 2) et 3), on a donc : pour tous $x, y \in E$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$ ou bien $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing$.

Définitions. Lorsqu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive, on dit que c'est une **relation d'ordre** (ou plus simplement un **ordre**). Dans ce cas, deux éléments x, y sont dits **comparables** si $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, et on dit que l'ordre est **total** si tous les éléments de E sont comparables.

Exemples.

1) $\leq$ est un ordre total dans $\mathbb{R}$.
2) L'inclusion des ensembles est un ordre non total.

Lorsqu'un ensemble est ordonné, on peut ensuite définir, pour l'une de ses parties, les notions de majorant et minorant, plus grand et plus petit élément, élément maximal et élément minimal, borne supérieure et borne inférieure...

2 Applications

Définitions. Soient E, F deux ensembles. On appelle **fonction** de E dans F toute relation f de E dans F telle que tout élément de E soit en relation (au sens précédent) avec au plus un élément de F.
On note alors $y = f(x)$ plutôt que xfy, et on appelle **domaine de définition** de la fonction f la partie de E constituée des éléments qui sont en relation avec au moins un (donc exactement un) élément de F. Lorsque l'ensemble de définition est égal à E tout entier, on dit que f est une **application**. On note alors $f : E \to F$.

Il ne nous paraît pas utile de rappeler ici les notions bien connues d'image, d'antécédent, d'application identité, de composition de deux applications. Faisons par contre une brève incursion dans les structures algébriques.

Définition. Soit E un ensemble. On appelle **loi de composition interne** toute application $* : E \times E \to E$. On dit alors que $(E, *)$ est un **magma**.
Pour $x, y \in E$ on note plutôt $x * y$ l'image de (x, y), au lieu de $*(x, y)$.

Les lois internes classiques sont l'addition et la multiplication dans des ensembles de nombres, la composition des applications, etc.
En demandant à une loi de vérifier certaines propriétés spécifiques (associativité, élément neutre, symétrie), on obtient la notion de groupe. Un ensemble peut même être muni de deux lois internes, compatibles en un certains sens, ce qui mène à la définition d'anneau et de corps. On peut également définir des lois externes, ce qui mène cette fois à la notion d'espace vectoriel et d'algèbre.
Nous n'aborderons pas ces vastes sujets ici, et nous revenons maintenant aux applications ensemblistes générales.

Définitions. Soient E, F deux ensembles, et soit f une application de E dans F.
1) On dit que f est **injective** (est une **injection**) de E dans F si tout élément de F admet *au plus un* antécédent par f dans E :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x',$$

ce qui s'écrit aussi, par contraposée :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x').$$

2) On dit que f est **surjective** (est une **surjection**) de E dans (sur) F si tout élément de F admet *au moins un* antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E : y = f(x).$$

3) On dit que f est **bijective** (est une **bijection**) de E dans (sur) F si tout élément de F admet *un et un seul* antécédent par f dans E :

$$\forall y \in F, \ \exists! x \in E : y = f(x).$$

Comme nous le savons, avoir 3) équivaut à avoir simultanément 1) et 2).

Exemples.

1) L'application identité $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E, x \mapsto x$ est bien sûr une bijection.

2) Si A est un sous-ensemble de E, l'application $i : A \longrightarrow E, x \mapsto x$ est injective, on l'appelle **injection canonique** de A dans E.

3) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. L'application $\pi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}, x \mapsto \mathrm{cl}(x)$ est surjective, on l'appelle **surjection canonique** de E dans $E/\mathcal{R}$.

4) On qualifie de **dénombrable** tout ensemble qui est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers. Par exemple, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais pas $\mathbb{R}$.

5) Une bijection d'un ensemble dans lui-même s'appelle parfois une **permutation** (notamment si l'ensemble est fini).

6) **Attention!** La caractérisation de l'injectivité d'une application par la trivialité de son noyau ne concerne que les applications pour lesquelles ce vocabulaire a du sens, c'est-à-dire les morphismes de groupes (et en particulier les applications linéaires).

Proposition. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1) *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective;*
2) *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective;*
3) *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective;*
4) *si $g \circ f$ est injective, alors f est injective;*
5) *si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. On considère alors l'application de F dans E qui à tout $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On appelle cette application **l'application réciproque de f** et on la note f^{-1}.

Proposition. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une bijection, alors f^{-1} est une bijection de F sur E, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.*

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1) *S'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.*

2) *Si $F = E$ et f est **involutive** (est une **involution**), c'est-à-dire $f \circ f = \mathrm{id}_E$, alors c'est une bijection.*

3) *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. On a vu qu'alors $g \circ f$ est bijective, et on a de plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Définitions. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) Soit $A \subset E$. On appelle **image directe de A par f** l'ensemble

$$f(A) := \{y \in F : \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

2) Soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque de B par f** l'ensemble

$$f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

Attention! La notation $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que f est bijective et que f^{-1} existe. Mais si c'est le cas, alors l'image réciproque en question coïncide avec l'image directe de B par la bijection réciproque f^{-1} de f. Ce fait explique l'abus de notation employé.

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une application.*

1) *Pour toutes parties A_1, A_2 de E,*

$$
\begin{aligned}
&A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)\\
&f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)\\
&f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective}\\
&f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2) \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective.}
\end{aligned}
$$

2) *Pour toutes parties B_1, B_2 de F,*

$$
\begin{aligned}
&B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\\
&f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\\
&f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\\
&f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2).
\end{aligned}
$$

3) *Pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$, avec égalité si f est injective.*

4) *Pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) \subset B$, avec égalité si f est surjective.*

3 Ensembles finis

Dans ce qui suit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$
[\![1, n]\!] = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, n\} & \text{si } n \geq 1,\\ \varnothing & \text{si } n = 0. \end{cases}
$$

Définitions.

1) Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

2) Un ensemble E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $[\![1, n]\!]$. On montre alors que l'entier n est unique, on l'appelle **cardinal** de E, et on le note $\mathrm{Card}(E)$.

On remarque facilement que la relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Proposition. *Soient E, F deux ensembles.*

1) *Si F est fini, alors il existe une injection de E dans F si et seulement si E est fini et* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.

2) *Si E est fini, alors il existe une surjection de E dans F si et seulement si F est fini et* $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.

3) *Si E ou F est fini, alors il existe une bijection de E dans F si et seulement si E et F sont finis et* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Par exemple, en appliquant 1) à l'injection canonique d'une partie $A \subset F$ on obtient que toute partie d'un ensemble fini est aussi finie et de cardinal inférieur ou égal.

Proposition. *Si E et F sont des ensembles finis, alors $E \cup F$ et $E \times F$ sont finis, et*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Card}(E \cup F) &= \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)\\
\mathrm{Card}(E \times F) &= \mathrm{Card}(E) \cdot \mathrm{Card}(F).
\end{aligned}
$$

De la première formule on déduit par exemple que si une partie d'un ensemble fini a même cardinal que lui, alors elle lui est égale. Avec la seconde formule on peut démontrer que si $\mathcal{F}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications de E dans F (ensembles finis), alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\mathrm{Card}(F))^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Cette formule justifie ainsi l'emploi de la notation F^E à la place de $\mathcal{F}(E, F)$. Elle mène également facilement au résultat suivant.

Proposition. *Si E est un ensemble fini, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est aussi fini, et*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

Une dernière propriété très utile.

Proposition. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application entre ensembles finis de même cardinal. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est injective;*

(ii) *f est surjective;*

(iii) *f est bijective.*

4 Principe de récurrence

Le principe de récurrence se décline sous plusieurs variantes. Voici les plus usitées.

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un paramètre entier naturel n.

1) **Récurrence « standard ».** On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(a)$ soit vraie, et que pour tout $n \geq a$ on ait l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq a$.

2) **Récurrence forte.** On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(a)$ soit vraie, et que pour tout $n \geq a$ on ait l'implication $\big(\forall k \in [\![a, n]\!], P(k)\big) \Rightarrow P(n+1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq a$.

3) **Récurrence finie.** On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(a)$ soit vraie et $b > a$ tel que pour tout $n \in [\![a, b-1]\!]$ on ait l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![a, b]\!]$.

4) **Récurrence descendante.** On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $P(a)$ soit vraie et $b < a$ tel que pour tout $n \in [\![b+1, a]\!]$ on ait l'implication $P(n) \Rightarrow P(n-1)$. Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![b, a]\!]$.