Groupe de Travail sur les Formes Automorphes

Théorie spectrale du Laplacien dans le cas cocompact

par Emmanuel Pedon (3, 10 et 24 mars 2005)

N.B. Cette note présente essentiellement les résultats des paragraphes 2.1 et 2.3 du livre de Bump.

1 Contexte et prérequis

On sait que le groupe $G = GL^+(2,\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par homographies :

$$g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \text{ et } z \in \mathcal{H}.$$

On va s'intéresser ici (et plus loin) à la théorie spectrale de certains quotients $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, où Γ est un sous-groupe de G agissant **discontinûment** sur $\mathcal{H}$ (on dira plus brièvement que Γ est un sous-groupe discontinu de G), c'est-à-dire tel que, pour tous compacts K_1, K_2 de $\mathcal{H}$ l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K_1) \cap K_2 \neq \varnothing\}$ est fini. (Par exemple, il suffit que Γ soit discret dans G pour qu'il agisse discontinûment.) Observons qu'on peut toujours supposer que Γ contient $-I$, car en remplaçant Γ par le sous-groupe $\Gamma' = \langle \Gamma, -I \rangle$ on obtient le même quotient (l'action de $-I$ est triviale). De même on voit qu'on peut aussi supposer que les éléments de Γ sont de déterminant 1.

Notons $G_1 = SL(2,\mathbb{R})$, $K \simeq SO(2)$ le stabilisateur de i pour l'action (par homographies) de G_1 sur $\mathcal{H}$, $Z = \mathbb{R}^* I$ le centre de G, et $Z^+ = \mathbb{R}^*_+ I$. Il est clair que G_1 est isomorphe à G/Z^+. Comme $\mathcal{H} = G_1/K \simeq G/Z^+K$, et comme K est compact, on voit donc que $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est compact (resp. de volume fini) si et seulement si $\Gamma\backslash G_1 \simeq \Gamma\backslash G/Z^+$ est compact (resp. de volume fini), ou encore, si et seulement si tout domaine fondamental (fermé) est compact (resp. de volume fini). On dit alors que **Γ est cocompact (resp. de covolume fini) dans G_1**. Ces deux notions sont facilement reliées puisqu'on peut démontrer qu'un sous-groupe discontinu Γ de G_1 est cocompact si et seulement s'il est de covolume fini et ne contient aucun élément parabolique [1] [Bump, Exercice 1.2.9 p. 25]. On notera en particulier qu'un quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ compact est sans cusp (pointe), puisqu'un **cusp** est par définition [Bump, p. 22] un point de la frontière $\partial\mathcal{H} \simeq P^1(\mathbb{R})$ de $\mathcal{H} \subset P^1(\mathbb{C})$ qui est le point fixe d'un élément parabolique non trivial de Γ (géométriquement, c'est un point en lequel le domaine fondamental de Γ va toucher le bord).

Dans toute la suite de cet exposé, nous supposerons que **Γ désigne un sous-groupe discontinu et cocompact de $SL(2,\mathbb{R})$, contenant $-I$**. Dans un exposé ultérieur nous considèrerons le cas plus général où Γ est de covolume fini.

Bien entendu, nos hypothèses excluent les cas du groupe modulaire $\Gamma(1) = SL(2,\mathbb{Z})$ et de tous ses sous-groupes de congruence $\Gamma(N)$. Ils sont en effet de covolume fini [Bump, Exercice 1.2.6]

---

1. À ce stade, il est sans doute utile de rappeler le résultat suivant [Bump, Exercice 1.2.7 p. 25.]. Soit $\gamma \neq \pm I$ un élément de $SL(2,\mathbb{R})$ agissant sur $P^1(\mathbb{C})$.

(i) Si $|\operatorname{tr}(\gamma)| < 2$, alors γ possède deux points fixes distincts dans $P^1(\mathbb{C})$; l'un est dans $\mathcal{H}$ est l'autre est son conjugué. On dit que γ est **elliptique**.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2$, alors γ possède deux points fixes distincts, situés dans $\partial\mathcal{H}$. On dit que γ est **hyperbolique**.

(iii) Si $|\operatorname{tr}(\gamma)| = 2$, alors γ possède un unique point fixe, situé dans $\partial\mathcal{H}$. On dit que γ est **parabolique**.

mais induisent des cusps : un seul pour $\Gamma(1)$ (∞, fixé par toute translation), trois pour $\Gamma(2)$, etc. Toutefois les exemples de quotients $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ compacts restent nombreux et intéressants. Citons le cas où Γ est le groupe des unités d'une algèbre de quaternions, et celui où Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte (connexe, orientable, sans bord) M de genre $n \geq 2$. Plus précisément, on peut démontrer qu'une telle variété s'écrit $M = \Gamma\backslash\mathcal{H}$, avec Γ un groupe libre engendré par $2n$ éléments hyperboliques $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ soumis à la seule relation

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\cdots\gamma_{2n-1}\gamma_{2n}\gamma_{2n-1}^{-1}\gamma_{2n}^{-1} = 1$$

Un domaine fondamental pour cette action est un polygone régulier à $4n$ côtés [voir par exemple Buser].

2 Deux interprétations du problème spectral

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On introduit les opérateurs différentiels suivants, dits **opérateurs de Maass de poids k**, agissant sur $C^\infty(\mathcal{H})$:

$$R_k = \mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{k}{2} = (z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k}{2},$$
$$L_k = -\mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{k}{2} = -(z-\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{k}{2},$$

ainsi que le **Laplacien hyperbolique de poids k**

$$\Delta_k = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \mathrm{i}ky\frac{\partial}{\partial x}.$$

Définissons également une action à droite de G sur $C^\infty(\mathcal{H})$ en posant

$$f|_k g(z) = \left(\frac{c\bar{z}+d}{|cz+d|}\right)^k f(g\cdot z), \quad \text{si} \quad g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right).$$

Lemme 1.

1) $\Delta_k = -L_{k+2}R_k - \frac{k}{2}(1+\frac{k}{2}) = -R_{k-2}L_k + \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})$.

2) *Pour $f \in C^\infty(\mathcal{H})$ et $g \in G$, on a :*

$$(R_k f)|_{k+2}g = R_k(f|_k g),$$
$$(L_k f)|_{k-2}g = L_k(f|_k g),$$
$$(\Delta_k f)|_k g = \Delta_k(f|_k g).$$

Démonstration. Facile, voir Bump, Lemma 2.1.1 p. 130. ✓

Notons $L^2(\mathcal{H})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $\mathcal{H}$ pour la mesure hyperbolique (G-invariante) $y^{-2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. Le Laplacien Δ_k est défini sur le sous-espace dense $C_c^\infty(\mathcal{H})$, mais il n'est évidemment pas borné de $L^2(\mathcal{H})$ dans $L^2(\mathcal{H})$. En revanche :

Proposition 2. *Le Laplacien Δ_k est un opérateur symétrique sur $L^2(\mathcal{H})$, de domaine $C_c^\infty(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Soient $f, g \in C_c^\infty(\mathcal{H})$. La formule de Green s'écrit

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\,(\bar{g}\Delta_e f - f\Delta_e\bar{g}) = \int_C \left(\bar{g}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right) - f\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}\mathrm{d}y - \frac{\partial \bar{g}}{\partial y}\mathrm{d}x\right)\right),$$

où Δ_e désigne le Laplacien euclidien et C est un contour dont l'intérieur contient complètement les supports de f et g. En particulier, ce qui est sous l'intégrale de droite est nul et on a

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\;\bar{g}\Delta_e f = \int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\;f\Delta_e\bar{g}. \tag{1}$$

Définissons l'opérateur $T = \mathrm{i}y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}$ agissant sur $C_c^\infty(\mathcal{H})$. On écrit

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\, ((Tf)\bar{g} - f(\overline{Tg})) &= \mathrm{i}\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\, y^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{g} + f\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}\right) \\ &= \mathrm{i}\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}(y^{-1}f\bar{g}\mathrm{d}y) \\ &= \mathrm{i}\int_{C} \mathrm{d}y\, y^{-1}f\bar{g}.\end{aligned}$$

On a ici utilisé le théorème de Stokes en prenant aussi un contour C situé au-delà des supports de f et g, de sorte que

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\, (Tf)\bar{g} = \int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\, f(\overline{Tg}). \tag{2}$$

Comme

$$(\Delta_k f|g) = \int_{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{y^2}(\Delta_k f)g = \int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\, (-\Delta_e f + kTf)\bar{g},$$

on voit que (1) et (2) donnent la symétrie cherchée. ✓

On fixe maintenant un caractère unitaire χ de Γ tel que $\chi(-I) = (-1)^k$, et on définit l'espace $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ formé des fonctions $f \in C^\infty(\mathcal{H})$ vérifiant l'identité

$$f|_k\gamma(z) = \chi(\gamma)f(z)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, c'est-à-dire

$$f(\gamma\cdot z) = \chi(\gamma)\left(\frac{c\bar{z}+d}{|cz+d|}\right)^{-k} f(z)$$

pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$[2]. On voit que la condition $\chi(-I) = (-1)^k$ sert à rendre cet espace non trivial. Pour $f, g \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$, le produit $f\bar{g}$ est Γ-invariant, donc le produit scalaire

$$(f|g) = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(z)\, f(z)\overline{g(z)}$$

est bien défini[3], et l'on désignera par $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ le complété hilbertien de $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ pour ce produit scalaire.

Proposition 3.

1) *R_k (resp. L_k, Δ_k) applique $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ dans $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k+2)$ (resp. dans $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k-2)$, resp. dans lui-même).*

2) *Si $f \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ et $g \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k+2)$, alors $(R_k f|g) = (f|-L_{k+2}g)$.*

3) *Le Laplacien Δ_k est un opérateur symétrique (non borné) sur $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$.*

Démonstration. L'assertion 1) découle immédiatement du lemme 1. Soient $f \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ et $g \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k+2)$. On voit facilement que la 1-forme différentielle $y^{-1}f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\bar{z}$ est

2. Il aurait été plus naturel de noter cet espace $C^\infty(\mathcal{H}, \chi, k)$ étant donné que ses éléments sont définis sur $\mathcal{H}$ et pas sur le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ (sauf lorsque χ est trivial), mais il s'agit visiblement d'une notation consacrée.

3. Nous désignons ici par $\mathrm{d}\mu(z)$ la mesure usuelle $\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}$ sur $\mathcal{H}$, et nous rappelons qu'elle est G_1-invariante.

Γ-invariante, donc peut s'interpréter comme une 1-forme sur le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Comme cette variété est compacte et de dimension 2, un corollaire bien connu du théorème de Stokes permet d'écrire

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \mathrm{d}(y^{-1} f(z)\overline{g(z)}\mathrm{d}\bar{z}) \\
&= \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \left(-\frac{\partial}{\partial y}(y^{-1} f\bar{g}) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}(y^{-1} f\bar{g})\right) \\
&= -\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}\left[\left(\mathrm{i}y\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\bar{g} - \left(\overline{\mathrm{i}y\frac{\partial g}{\partial x} - y\frac{\partial g}{\partial y}}\right)f - f\bar{g}\right] \\
&= -\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}[(R_k f)\bar{g} + f(\overline{L_{k+2}g})].
\end{aligned}$$

On en déduit l'assertion 2).

D'après 1), on sait que Δ_k stabilise le sous-espace dense $C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$. D'après 2), la composée $L_{k+2}R_k$ est un opérateur symétrique, donc [cf. lemme 1] $\Delta_k = -L_{k+2}R_k - \frac{k}{2}(1+\frac{k}{2})$ l'est aussi, et ceci prouve 3). ✓

Remarque 4. On démontrera également à la fin de cette note que Δ_k possède une extension autoadjointe.

Le but de cet exposé est essentiellement de démontrer que Δ_k possède un spectre L^2 discret. Pour cela notre premier objectif va être d'interpréter l'espace à décomposer $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ comme un espace de G-représentation.

Reprenons les notations du §1 et introduisons l'espace $C(\Gamma\backslash G, \chi)$ des fonctions $F \in C(G)$ qui vérifient la condition

$$F(\gamma g u) = \chi(\gamma)F(g), \qquad \forall\gamma \in \Gamma,\ \forall g \in G,\ \forall u \in Z^+.$$

On définit de manière analogue [4] les espaces $C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi)$ et $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$, l'intégration s'effectuant ici par rapport à une mesure de Haar que nous définissons sur le groupe $G/Z^+ \simeq G_1 = SL(2,\mathbb{R})$ de la façon suivante : on part de la décomposition d'Iwasawa $G = Z^+NK$, qui dit plus précisément que tout $g \in G$ s'écrit

$$g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix} r_\theta \qquad (x\in\mathbb{R}, \theta\in\mathbb{R}, y>0, u>0), \tag{3}$$

avec unicité si on prend θ modulo 2π. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a ici noté r_θ la matrice canoniquement associée à la rotation vectorielle plane d'angle θ, de sorte que $K = \{r_\theta,\ \theta\in\mathbb{R}\}$. Comme G est unimodulaire, un résultat classique [5] donne l'expression de la mesure de Haar correspondant à ces coordonnées sur G :

$$\mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}u}{u}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\mathrm{d}\theta, \tag{4}$$

où $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}\theta$ désignent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On en déduit évidemment l'expression de la mesure de Haar sur G/Z^+. Bien entendu, $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire usuel défini sur $L^2(G)$.

---

4. Là encore, ces notations classiques peuvent être source de confusion.
5. Voir Bump, p. 137-139 pour plus de détails.

Proposition 5. *L'espace $C_c^\infty(\Gamma\backslash G,\chi)$ est dense dans $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$.*

Démonstration. Tout d'abord on observe que les espaces $C_c(\Gamma\backslash G,\chi)$ et $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ s'identifient respectivement à $C_c(\mathcal{F})$ et $L^2(\mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ désigne un domaine fondamental ouvert pour l'action de Γ sur G/Z^+. Un résultat standard d'analyse L^p permet de conclure que $C_c(\Gamma\backslash G,\chi)$ est dense dans $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$. Il reste donc à voir que tout élément de $C_c(\Gamma\backslash G,\chi)$ peut être approché uniformément par un élément de $C_c^\infty(\Gamma\backslash G,\chi)$, ce qui se démontre aisément en utilisant la méthode classique de convolution par une fonction lisse. ✓

Considérons maintenant la **représentation régulière à droite** ρ de G sur $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$. Il est clair qu'il s'agit d'une représentation unitaire (continue[6]). Nous allons expliquer pourquoi cette représentation a beaucoup à voir avec notre problème spectral.

Rappelons auparavant que les représentations unitaires irréductibles de K sont bien connues : ce sont exactement les caractères e_k, $k\in\mathbb{Z}$, définis par

$$\mathrm{e}_k(r_\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}.$$

Comme K est compact, le théorème de complète réductibilité affirme que toute représentation unitaire (π,H) de K est somme directe de ces caractères e_k :

$$(\pi,H)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} m_k(\mathrm{e}_k,V_k), \tag{5}$$

où $V_k\simeq\mathbb{C}^*$ désigne l'espace de la représentation e_k et $m_k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ désigne la multiplicité de e_k dans π. Rappelons également que chaque composante $m_k(\mathrm{e}_k,V_k)$ de la somme directe s'appelle la **composante e_k-isotypique** de π. Ainsi, m_kV_k n'est autre que le sous-espace

$$H_k=\{v\in H:\pi(r_\theta)v=\mathrm{e}_k(r_\theta)v=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}v,\ \forall r_\theta\in K\}. \tag{6}$$

Proposition 6. *Pour $k\in\mathbb{Z}$, notons $L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k)$ la composante e_k-isotypique de $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$, c'est-à-dire le sous-espace constitué des fonctions F vérifiant $\rho(r_\theta)F=\mathrm{e}_k(r_\theta)F$.*

1) *On a une décomposition en somme directe orthogonale*

$$L^2(\Gamma\backslash G,\chi)=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k).$$

2) *L'application σ_k, définie par $(\sigma_k f)(g)=(f|_k g)(\mathrm{i})$ pour $f\in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H},\chi,k)$ et $g\in G$, réalise un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H},\chi,k)$ et $L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k)$.*

Démonstration. Le premier point n'est qu'une reformulation de (5) lorsqu'on prend pour π la restriction $\rho|_K$ au sous-groupe K de la représentation régulière à droite de G.

Ensuite, il est facile de vérifier que σ_k envoie $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H},\chi,k)$ dans $L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k)$. Réciproquement, si $F\in L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k)$, on voit que la fonction f définie par

$$f(z)=F\left(\left(\begin{smallmatrix} y & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)$$

est dans $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H},\chi,k)$ et vérifie $\sigma_k f=F$. Enfin, on constate que σ_k préserve le produit scalaire en utilisant la formule (4). ✓

6. Toutes les représentations (π,V) seront supposées continues dans notre exposé, ce qui signifie que l'application $G\times V\longrightarrow V$, $(g,v)\longmapsto\pi(g)v$ est continue; si de plus π est une représentation unitaire sur un espace de Hilbert, alors il est équivalent d'imposer la condition que $g\longmapsto\pi(g)v$ est continue pour tout v.

Puisque les espaces $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$ et $L^2(\Gamma\backslash G, \chi, k)$ sont isomorphes, on se doute qu'il doit y avoir sur $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ des opérateurs dont la restriction à chaque composante $L^2(\Gamma\backslash G, \chi, k)$ joue respectivement le rôle des opérateurs R_k, L_k, Δ_k définis précédemment. Conservons sur G le système des coordonnées x, y, u, θ données par (3) et posons

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ L &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\left(-\mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ \Delta &= y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}. \end{aligned}$$

Pour $F \in C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi, k)$ on a clairement $\frac{\partial F}{\partial\theta} = \mathrm{i}kF$. Cette remarque et la définition des R_k, L_k, Δ_k conduisent facilement aux relations

$$\begin{aligned} \sigma_{k+2} \circ R_k &= R \circ \sigma_k, \\ \sigma_{k-2} \circ L_k &= L \circ \sigma_k, \\ \sigma_k \circ \Delta_k &= \Delta \circ \sigma_k, \end{aligned}$$

qui fournissent précisément l'interprétation que l'on cherchait.

Notons que ces opérateurs possèdent une interprétation classique en théorie des représentations, qui tient essentiellement au fait bien connu que l'algèbre enveloppante d'un groupe de Lie G s'identifie naturellement à l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants à gauche sur $C^\infty(G)$ [Voir par exemple Knapp, p. 48-50]. Plus précisément, dans l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C}) = M(2, \mathbb{C})$ de G, considérons les éléments

$$R' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad L' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad H' = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et définissons l'opérateur de Casimir

$$\Omega = \frac{1}{4}(H'^2 + 2R'L' + 2L'R').$$

Identifiant ces éléments à des opérateurs différentiels sur G comme nous venons de le rappeler, on peut démontrer les identités suivantes [7] [cf. par exemple Bump, Proposition 2.2.5 p. 155] :

$$dR' = R, \quad dL' = L, \quad \Omega = -\Delta.$$

7. Rappelons que, pour un élément X dans l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G, l'écriture dX est une abréviation de $d\rho(X)$ où ρ désigne la représentation régulière à droite de G sur $C^\infty(G)$.

3 Spectre du Laplacien

Le but de ce paragraphe est de prouver un théorème spectral pour le Laplacien agissant sur $\Gamma\backslash G$ (et même pour toute la famille des Laplaciens Δ_k). L'idée principale (due à Selberg) consiste à introduire certains opérateurs compacts et autoadjoints (pour lesquels la théorie spectrale est bien connue) qui vont commuter avec le Laplacien.

Soit π une représentation de G sur un espace de Hilbert H. Pour $\phi \in C_c^\infty(G)$ on définit un opérateur $\pi(\phi) \in \operatorname{End} H$ par la formule

$$\pi(\phi)v = \int_G \mathrm{d}g\, \phi(g)\pi(g)v.$$

Cette intégrale est bien définie, puisque π est (comme toujours supposée) continue, de sorte que l'application $g \longmapsto \phi(g)\pi(g)v$ est continue sur le support compact de ϕ. On voit aussi facilement que $\pi(\phi)$ est un opérateur borné [8].

Nous allons surtout étudier cet opérateur dans le cas particulier où π désigne la représentation régulière à droite ρ de G sur $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$.

Proposition 7. *Soit $\phi \in C_c^\infty(G)$.*

1) *Si π est unitaire (par exemple, si $\pi = \rho$) et $\phi(g) = \overline{\phi(g^{-1})}$ pour tout $g \in G$ alors $\pi(\phi)$ est autoadjoint.*

2) *L'opérateur $\rho(\phi)$ est de Hilbert-Schmidt, donc compact, et il applique $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ dans $C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi)$.*

3) *Si $\phi(r_\theta g) = \mathrm{e}_k(r_\theta)^{-1}\phi(g)$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ et pour tous $g \in G, r_\theta \in K$, alors $\rho(\phi)$ applique $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ dans $C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi, k)$.*

Démonstration. 1) Soient u, v dans l'espace de π. Les deux hypothèses impliquent :

$$\begin{aligned}
(\pi(\phi)v|w) &= \int_G \mathrm{d}g\, \phi(g)\, (\pi(g)v|w) \\
&= \int_G \mathrm{d}g\, \phi(g)\, (v|\pi(g^{-1})w) \\
&= \int_G \mathrm{d}g\, \phi(g^{-1})\, (v|\pi(g)w) \\
&= (v|\pi(\phi)w),
\end{aligned}$$

2) Soient $f \in L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ et $g \in G$. Par définition,

$$(\rho(\phi)f)(g) = \int_G \mathrm{d}h\, \phi(h)f(gh). \tag{7}$$

Faisons le changement de variables $h \longmapsto g^{-1}h$ et remplaçons la variable $h \in G$ par γhu avec $\gamma \in \Gamma, h \in \Gamma\backslash G/Z^+$ et $u \in Z^+$. Comme $f(\gamma h) = \chi(\gamma)f(h)$, on trouve que

$$\begin{aligned}
(\rho(\phi)f)(g) &= \int_{\Gamma\backslash G/Z^+} \mathrm{d}h \int_{Z^+} \mathrm{d}u \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\phi(g^{-1}\gamma hu)f(h) \\
&= \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}h\, K(g,h)f(h),
\end{aligned} \tag{8}$$

8. L'application $\phi \longmapsto \pi(\phi)$ n'est autre que la **transformée de Fourier** de ϕ relativement à π.

où $\mathcal{F}$ désigne la fermeture d'un domaine fondamental de $\Gamma\backslash G/Z^+$ et

$$K(g,h) = \int_{Z^+} \mathrm{d}u \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\phi(g^{-1}\gamma hu).$$

Comme $\phi \in C_c^\infty(G)$, on voit que $K \in C^\infty(\mathcal{F}\times\mathcal{F})$, et donc $K \in L^2(\mathcal{F}\times\mathcal{F})$ puisque $\mathcal{F}$ est compact. Par suite, $\rho(\phi)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. En outre, $f \in L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ et $\Gamma\backslash G/Z^+$ compact impliquent $f \in L^1(\Gamma\backslash G/Z^+)$, de sorte que l'intégrale dans (8) converge uniformément. Puisque $g \mapsto K(g,h)$ est C^∞ on en déduit que $\rho(\phi)f$ est aussi une fonction C^∞. Enfin, la χ-équivariance à gauche sous l'action de Γ saute aux yeux avec la définition (7).

3) En utilisant l'hypothèse, on obtient

$$\begin{aligned}(\rho(\phi)f)(gr_\theta) &= \int_G \mathrm{d}h\, \phi(h)f(gr_\theta h)\\ &= \int_G \mathrm{d}h\, \phi(r_\theta^{-1}h)f(gh)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\int_G \mathrm{d}h\, \phi(h)f(gh)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}(\rho(\phi)f)(g),\end{aligned}$$

cqfd. ✓

Lemme 8. *Soit π une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H. On note $H(k)$ la composante e_k-isotypique de $\pi|_K$, et on fixe $f \in H$ non nulle.*

1) *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\phi \in C_c^\infty(G)$ telle que $\pi(\phi)$ soit autoadjoint et $|\pi(\phi)f - f| < \varepsilon$. En particulier, $\pi(\phi)f \neq 0$.*

2) *Si $f \in H(k)$, alors on peut choisir ϕ telle que $\phi(r_\theta g) = \phi(gr_\theta) = \mathrm{e}_k(r_\theta)\phi(g) = \mathrm{e}_k(r_\theta)^{-1}\phi(g)$ pour tous $g \in G$ et $r_\theta \in K$.*

3) *Si $f \in H(k)$ et si de plus l'espace $H(k)$ est de dimension finie, alors il existe ϕ telle que $\pi(\phi)f = f$.*

Démonstration. 1) Comme l'application $g \mapsto \pi(g)f$ est continue de G dans H, il existe un voisinage U de $1 \in G$ tel que $|\pi(g)f - f| < \varepsilon$ pour tout $g \in U$. Soit ϕ_0 une fonction définie sur un compact de U, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\int_G \mathrm{d}g\,\phi_0(g) = 1$. Alors

$$|\pi(\phi_0)f - f| = \left|\int_G \mathrm{d}g\,\phi_0(g)[\pi(g)f - f]\right| \leq \int_G \mathrm{d}g\,\phi_0(g)|\pi(g)f - f| < \varepsilon.$$

On peut également supposer $\phi_0(g) = \phi_0(g^{-1})$, et donc que $\pi(\phi_0)$ est autoadjoint d'après la proposition précédente. Prenant $\varepsilon < |f|$, on obtient au passage que $\pi(\phi_0)f \neq 0$.

2) Conservons les notations du 1) et considérons l'application $\sigma : G\times K \longrightarrow G, (g,r) \longrightarrow rgr^{-1}$. Elle est continue, de sorte que $\sigma^{-1}(U)$ est ouvert dans $G\times K$. Cet ouvert contient clairement les points $(1,r)$ pour tout $r \in K$, et contient donc aussi un voisinage ouvert $V_r \times W_r \subset G\times K$ de chacun d'eux. Comme K est compact, il existe un sous-recouvrement fini $W_{r_1},\ldots,W_{r_p}$, et on note $V = V_{r_1}\cap\cdots\cap V_{r_p}$. Ce V est donc un voisinage ouvert de $1 \in G$ tel que $rVr^{-1} \subset U$ pour tout $r \in K$.

Soit maintenant ϕ_1 une fonction définie sur un compact de V, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\phi_1(g) = \phi_1(g^{-1})$, et soit

$$\phi_0(g) = \int_K \mathrm{d}r\,\phi_1(rgr^{-1}).$$

Alors ϕ_0 est positive, à support compact inclus dans U, et vérifie les identités

$$\phi_0(g) = \phi_0(g^{-1}), \quad \phi_0(rgr^{-1}) = \phi_0(g)$$

pour tous $g \in G$ et $r \in K$. Comme G est unimodulaire et K est compact, on a :

$$\pi(\phi_0)f = \int_G \mathrm{d}g\, \phi_0(g)\pi(g)f = \int_G \mathrm{d}g \int_K \mathrm{d}r\, \phi_0(gr)\pi(gr)f.$$

Nous utilisons (enfin) l'hypothèse que $f \in H(k)$ pour écrire que

$$\pi(\phi_0)f = \int_G \mathrm{d}g \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \phi_0(gr_\theta)\pi(g)f = \pi(\phi)f,$$

où l'on a posé

$$\phi(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \phi_0(gr_\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \phi_0(r_\theta g).$$

Il est alors clair que cette fonction satisfait aux identités $\phi(r_\theta g) = \phi(gr_\theta) = \mathrm{e}_k(r_\theta)^{-1}\phi(g)$ et $\phi(g) = \phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$.

3) Soit $f \in H(k)$. D'après 1), f est une limite de fonctions du type $\pi(\phi_n)f$ (prendre $\varepsilon = 1/n$). D'après 2), on peut supposer que les ϕ_n vérifient certaines conditions. Or il est facile de constater que l'ensemble V des fonctions de la forme $\pi(\phi)f$, lorsque ϕ varie comme dans 2), est un sous-espace de $H(k)$. Par hypothèse, V est de dimension finie, donc est fermé dans H. Par conséquent, f reste dans V, i.e. $f = \sum \lambda_p \pi(\phi_p)f$. Posant $\phi = \sum \lambda_p \phi_p$ on obtient l'assertion voulue. ✓

Soit H un sous-espace fermé de $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$, G-invariant pour l'action de ρ. D'après (5) et (6), on a une décomposition en somme directe hilbertienne $H = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k$, où H_k désigne l'espace de la composante e_k-isotypique dans $\rho|_K$ agissant sur H.

Proposition 9. *Soit k tel que $H_k \neq \{0\}$. Alors $H_k^\infty = H_k \cap C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi)$ contient une fonction propre (non nulle) du Laplacien Δ.*

Démonstration. Soit $f \in H_k$, non nulle. D'après le lemme précédent, il existe $\phi \in C_c^\infty(G)$ telle que $\phi(r_\theta g) = \phi(gr_\theta) = \mathrm{e}_k(r_\theta)^{-1}\phi(g)$ et $\rho(\phi)f \neq 0$. D'après la '`nv`', l'opérateur $\rho(\phi)$ envoie H sur $H \cap C^\infty(\Gamma\backslash G, \chi, k) = H_k^\infty$ et la restriction de $\rho(\phi)$ à H_k^∞ est un opérateur compact et autoadjoint. D'après le théorème spectral, $\rho(\phi)$ admet une valeur propre λ dans H_k et l'espace propre correspondant V est de dimension finie. Or :

Lemme 10. *Le Laplacien Δ commute à l'opérateur $\rho(\phi)$.*

Démonstration. Comme le Laplacien Δ s'identifie à un élément du centre de l'algèbre enveloppante de G (cf. §2), il commute à l'action de G par translations à droite $\rho(g)$ (et à gauche) [cf. par exemple Bump, Proposition 2.2.4 p. 152 ou Knapp, Proposition 3.8 p. 51]. Le résultat s'en déduit immédiatement. ✓

On déduit de ce lemme que V est Δ-invariant. Comme il est de dimension finie, la restriction de Δ s'y diagonalise, ce qui prouve bien qu'on peut trouver un élément de $V \subset H_k^\infty$ qui est une fonction propre de Δ. ✓

Théorème 11. *L'espace $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ se décompose en une somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants et irréductibles sous l'action de ρ.*

Démonstration. Considérons la famille des ensembles de sous-espaces invariants irréductibles et deux à deux orthogonaux de $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$. Par le lemme de Zorn, on peut en extraire un ensemble maximal M, et l'on note U le complémentaire orthogonal dans $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ de la fermeture de la somme directe des éléments de M. Nous devons montrer que $U=\{0\}$.

Raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $f\neq 0$ dans U. D'après le '`lem1`' il existe $\phi\in C_c^\infty(G)$ tel que $\rho(\phi)$ soit autoadjoint et non nul. Comme dans la proposition précédente, le théorème spectral implique que $\rho(\phi)$ admet une valeur propre non nulle λ et le sous-espace propre correspondant $L\subset U$ est de dimension finie. En particulier, toute intersection $L\cap W$ de L avec un sous-espace invariant fermé non nul $W\subset U$ est de dimension finie, il existe donc une intersection de ce type L_0 qui soit minimale. Notons alors V le plus petit des sous-espaces invariants fermés $W\subset U$ tels que $L_0=L\cap W$.

Supposons que V soit réductible et s'écrive $V=V_1\oplus V_2$ avec V_1, V_2 invariants, fermés et non nuls. Toute $f_0\in L_0$ non nulle se décompose donc sous la forme $f_0=f_1+f_2$ avec $f_i\in V_i$. Vu la définition de $\rho(\phi)$, les sous-espaces ρ-invariants V_1, V_2 sont également $\rho(\phi)$-invariants, si bien que $\rho(\phi)f_i-\lambda f_i\in V_i$ pour $i=1,2$. Comme par ailleurs

$$[\rho(\phi)f_1-\lambda f_1]+[\rho(\phi)f_2-\lambda f_2]=\rho(\phi)f_0-\lambda f_0=0,$$

on en déduit que f_1 et f_2 sont des fonctions propres de $\rho(\phi)$ associées à λ. En particulier $f_1\in L\cap V_1$ et comme on peut supposer $f_1\neq 0$ (quitte à raisonner avec f_2) ceci donne l'inclusion $\{0\}\neq L\cap V_1\subset L_0=L\cap V$. Par minimalité de L_0 il y a nécessairement égalité, ce qui est impossible puisque $V_1\subsetneq V$.

Par conséquent, V est un sous-espace invariant, fermé et irréductible de $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ qui est inclus dans U. Ceci contredit la maximalité de M. Donc U est trivial et le théorème est démontré. ✓

Pour $k\in\mathbb{Z}$ donné, considérons l'ensemble

$$C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)=\{f\in C_c^\infty(G):f(r_1gr_2)=\mathrm{e}_k(r_1)\mathrm{e}_k(r_2)f(g),\ \forall g\in G,\ \forall r_1,r_2\in K\}.$$

Il s'agit clairement d'une algèbre pour le produit de convolution, et on peut démontrer qu'elle est commutative [Bump, Proposition 2.2.8 p. 163].

Pour ξ un caractère de cette algèbre, notons

$$H(\xi)=\{f\in L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k):\rho(\phi)f=\xi(\phi)f,\ \forall\phi\in C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)\}.$$

Théorème 12.

1) *Les $H(\xi)$ sont des sous-espaces de dimension finie de $C^\infty(\Gamma\backslash G,\chi,k)$, et ils sont deux à deux orthogonaux.*

2) *On a la décomposition en somme directe hilbertienne*

$$L^2(\Gamma\backslash G,\chi,k)=\bigoplus_\xi H(\xi),$$

où ξ parcourt l'ensemble des caractères de $C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)$ tels que $H(\xi)$ soit non nul.

Démonstration. 1) Soit ξ un caractère de $C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)$, et soit $f\in H(\xi)$ non nulle. Observons déjà que $H(\xi)\subset C^\infty(\Gamma\backslash G,\chi,k)$ en vertu de la '`nv`', 2). Par ailleurs, d'après le '`lem1`' (1 et 2), il existe $\phi\in C_c^\infty(G)$ telle que $\rho(\phi)f\neq 0$ et $\phi\in C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)$. Comme $\rho(\phi)f=\xi(\phi)f$ on en déduit que la valeur propre $\lambda=\xi(\phi)$ de l'opérateur compact autoadjoint $\rho(\phi)$ est non nulle. D'après le théorème spectral, le sous-espace propre qui lui est associé est de dimension finie. Comme il contient $H(\xi)$, celui est donc aussi de dimension finie.

Soient maintenant ξ et η deux caractères distincts de $C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)$, et soit $\phi\in C_c^\infty(K\backslash G/K,\mathrm{e}_k)$ telle que $\xi(\phi)\neq\eta(\phi)$ et écrire

$$\phi=\phi_1+\mathrm{i}\phi_2$$

avec

$$\phi_1(g) = \frac{1}{2}(\phi(g) + \overline{\phi(g^{-1})}), \quad \phi_2(g) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\phi(g) - \overline{\phi(g^{-1})}).$$

D'après la '`nv`' les opérateurs $\rho(\phi_1)$ et $\rho(\phi_2)$ sont autoadjoints. Quitte à prendre $\phi = \phi_1$ ou $\phi = \phi_2$, on peut supposer que $\rho(\phi)$ est aussi autoadjoint. Comme $H(\xi)$ et $H(\eta)$ sont contenus dans des sous-espaces propres distincts de $\rho(\phi)$, ils sont alors orthogonaux.

2) Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^2(\Gamma\backslash G, \chi, k)$ non nulle et orthogonale à tous les $H(\xi)$. Grâce au '`lem1`' on sait qu'il existe $\phi_0 \in C_c^\infty(K\backslash G/K, \mathrm{e}_k)$ telle que $\rho(\phi_0)f$ et f soient arbitrairement proches; on peut donc les supposer non orthogonales. Notons $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ la suite des valeurs propres (non nulles) de l'opérateur compact autoadjoint $\rho(\phi_0)$ agissant sur $L^2(\Gamma\backslash G, \chi, k)$, et soit $f = \sum_{i\geq 0} f_i$ la décomposition spectrale de f (on a ajouté l'indice $i = 0$ pour la partie correspondant au noyau). Comme $\rho(\phi_0) = \sum_{i\geq 1} f_i$, et puisque $\rho(\phi_0)f$ n'est pas orthogonal à f, il existe une f_p non orthogonale à f. Le sous-espace propre V associé à λ_p est de dimension finie et est invariant sous l'action de toute l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K, \mathrm{e}_k)$, car celle-ci est commutative. On en déduit que V est la somme directe des $H(\xi)$ tels que $\xi(\phi_0) = \lambda_p$. Mais alors f, n'étant pas orthogonale à f_p, ne peut être orthogonale à aucun de ces sous-espaces, contradiction. ✓

Corollaire 13. *L'espace $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k) = L^2(\Gamma\backslash G, \chi, k)$ se décompose en somme directe hilbertienne de sous-espaces propres du Laplacien Δ_k.*

Démonstration. Considérons les espaces $H(\xi)$ du théorème précédent. D'après le '`comm`', ils sont Δ-invariants. Comme ils sont de dimension finie, l'opérateur symétrique Δ (cf. proposition 2) induit sur chacun d'entre eux un opérateur autoadjoint, de sorte qu'ils se décomposent en somme directe de sous-espaces propres pour le Laplacien. On conclut donc avec le théorème précédent. ✓

Les deux derniers résultats disent donc que la décomposition en composantes isotypiques de la représentation régulière à droite ρ de G sur $L^2(\Gamma\backslash G, \chi)$ fournit la décomposition spectrale des Laplaciens Δ_k agissant sur $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$, et en particulier du « vrai » Laplacien $\Delta = \Delta_0$ agissant sur $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}) = L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \mathbf{1}, 0)$. Ils nous disent notamment que **le spectre de Δ est discret**. Nous étudions maintenant plus en détail le comportement de ses valeurs propres.

4 Étude des valeurs propres

Pour étudier le comportement des valeurs propres des opérateurs Δ_k, nous introduisons, selon un schéma classique, le noyau de Green associé à la résolvante $(\Delta_k + s)^{-1}$ où s désigne un réel positif. En réalité, nous nous contenterons du cas où $k = 0$, le cas général pouvant être traité de manière similaire.

La première étape consiste à définir le noyau de Green associé au Laplacien hyperbolique $\Delta = \Delta_0$ agissant sur les fonctions C^∞ à support compact dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. Rappelons que

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

D'après le lemme 1 et le deuxième point de la proposition 3 (adapté à l'espace $C_c^\infty(\mathcal{H})$), le Laplacien est un opérateur positif :

$$(\Delta f | f) = (-R_{-2}L_0 f | f) = (L_0 f | L_0 f) \geq 0. \tag{9}$$

Cependant, on ne sait pas (encore) si le spectre de Δ peut atteindre 0, c'est pourquoi nous allons analyser plutôt l'opérateur $\Delta + s$, où s désigne un réel > 0 qui sera fixé dans tout ce qui suit.

Proposition 14.

1) *À une constante non nulle près, il existe une unique fonction k définie et analytique sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ privé de la diagonale, possédant les propriétés suivantes :*

(i) $(\Delta_z + s)k(z,\zeta) = 0$*;*

(ii) $\lim\limits_{y \to 0} k(z,\zeta) = 0$*;*

(iii) *k est symétrique ;*

(iv) *pour tout $g \in G$ et tous $z, \zeta \in \mathcal{H}$, $k(g \cdot z, g \cdot \zeta) = k(z,\zeta)$.*

2) *Cette fonction k peut être (et sera dorénavant) normalisée par la condition*

$$\int_{\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(\zeta)\, g(z,\zeta)[(\Delta + s)f](\zeta) = f(z) \tag{10}$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathcal{H})$.

3) *Il existe une fonction $\tilde{k}$, définie et analytique sur $]0,1[$, telle que pour tous $z, \zeta \in \mathcal{H}$ on ait*

$$k(z,\zeta) = \tilde{k}(r), \qquad \text{avec } r = \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right|.$$

En outre, on a les estimées

$$\tilde{k}(r) \underset{r \to 1}{\sim} \mathrm{cst}(1-r)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4s})}, \qquad \tilde{k}(r) \underset{r \to 0}{=} \frac{1}{2\pi}\log(r) + \mathrm{O}(1). \tag{11}$$

Rappelons que le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$ admet également comme modèle le disque unité $\mathcal{D}$, via le difféomorphisme fourni par n'importe quelle **transformation de Cayley**

$$C_\zeta(z) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}},$$

où $\zeta \in \mathcal{H}$. Par conséquent, le dernier point de la proposition traduit simplement le fait que **le noyau de Green k est une fonction radiale**, c'est-à-dire K-invariante à gauche sur le quotient $\mathcal{H} = G_1/K$, ou encore bi-K-invariante sur G_1.

Démonstration. Commençons par un résultat préliminaire.

Lemme 15. *Soient $z, z', \zeta, \zeta' \in \mathcal{H}$. Alors $|C_\zeta(z)| = |C_{\zeta'}(z')|$ si et seulement s'il existe $g \in G$ tel que $(z',\zeta') = (g \cdot z, g \cdot \zeta)$.*

Démonstration du lemme. Soient $z, z', \zeta, \zeta' \in \mathcal{H}$ vérifiant $|C_\zeta(z)| = |C_{\zeta'}(z')|$. Il existe donc u de module 1 tel que $uC_\zeta(z) = C_{\zeta'}(z')$. Si φ_u désigne la multiplication à gauche par u dans $\mathcal{D}$, alors $g = C_{\zeta'}^{-1} \circ \varphi_u \circ C_\zeta$ est une homographie de $\mathcal{H}$ envoyant (z,ζ) sur (z',ζ'). L'implication réciproque est immédiate. ✓

Maintenant, supposons avoir déjà établi l'existence de k vérifiant les propriétés de 1). D'après le lemme et la propriété (iv), cette fonction $k = k(z,\zeta)$ ne dépend nécessairement que de la quantité $r = |(z-\zeta)/(z-\bar{\zeta})|$. Par conséquent, postuler l'existence de k revient à postuler l'existence d'une fonction $\tilde{k} = \tilde{k}(r)$, définie et analytique sur $]0,1[$, telle que $k(z,\zeta) = \tilde{k}(r)$, et vérifiant l'équation différentielle

$$[\mathrm{Rad}(\Delta + s)]\tilde{k}(r) = 0, \tag{12}$$

où $\mathrm{Rad}(\Delta + s)$ désigne la partie radiale de l'opérateur $\Delta + s$ « transporté » dans le disque unité $\mathcal{D}$ (via une transformation de Cayley), avec la condition de bord

$$\lim_{r \to 1} \tilde{k}(r) = 0. \tag{13}$$

Attelons-nous donc à cette tâche. Fixons $\zeta \in \mathcal{H}$ et notons $w = u + \mathrm{i}v$ la valeur générique de $C_\zeta(z)$, c'est-à-dire la variable dans $\mathcal{D}$, de sorte que $r = |w| = u^2 + v^2$. On démontre alors facilement le :

Lemme 16. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{4\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v}{(1-r^2)^2},$$
$$y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}(1-r^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

Tenant compte du fait qu'en coordonnées polaires $w=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ on a

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

on voit que l'équation (12) se traduit par

$$\tilde{k}''(r)+\frac{1}{r}\tilde{k}'(r)-\frac{4s}{(1-r^2)^2}\tilde{k}(r)=0. \tag{14}$$

Elle possède donc un point singulier régulier en $r=1$. Les solutions de l'équation aux indices sont $\alpha_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1+4s})$. Leur différence n'étant pas un entier, les solutions possibles de (14) sont de la forme $\varphi_\pm=(1-r)^{\alpha_\pm}f_\pm(1-r)$ avec $f_\pm$ analytique et non nulle au voisinage de $r=1$. Comme $\alpha_-<0$, la solution correspondante φ_- explose au voisinage de 1, si bien que seule la solution $\tilde{k}=\varphi_+$ (à une constante près) est compatible avec la condition (13).

Observons maintenant le comportement de cette solution au voisinage de $r=0$, qui est aussi un point singulier régulier de (14). Ici 0 est racine double de l'équation aux indices, ce qui implique que soit $\tilde{k}$ possède une singularité logarithmique, soit elle est analytique en $r=0$. Dans le second cas elle serait analytique sur l'intervalle $[-1,1]$, donc y admettrait un extremum. Supposons par exemple que ce soit un maximum M, atteint en $r=r_0$. Comme $\tilde{k}(\pm1)=0$ et comme $\tilde{k}$ n'est pas nulle, M est nécessairement >0. Par ailleurs, au voisinage de r_0, $\tilde{k}'$ décroît, donc $\tilde{k}''\leq 0$. Or l'équation (14) dit que $\tilde{k}''$ et k devraient être du même signe au voisinage de r_0, c'est absurde. Par conséquent, $\tilde{k}$ possède bien une singularité logarithmique en $r=0$.

Pour finir la preuve de la proposition, nous choisissons de normaliser $\tilde{k}$ de sorte à avoir

$$\tilde{k}(r)\underset{r\to0}{=}\frac{1}{2\pi}\log(r)+\mathrm{O}(1), \tag{15}$$

et nous démontrons la propriété reproduisante (10). Soient donc $f\in C_c^\infty(\mathcal{H})$, $z,\zeta\in\mathcal{H}$, $w=C_\zeta(z)=u+\mathrm{i}v$ et $F=C_\zeta\circ f$. En utilisant le '`wnz`' on voit que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{H}}\mathrm{d}\mu(z)\,g(z,\zeta)[(\Delta+s)f](z)\\&\qquad=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_R\smallsetminus B_\varepsilon}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\,\tilde{k}(|w|)\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)+\frac{4s}{(1-|w|^2)^2}\right]F(w),\end{aligned}$$

où B_r désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans $\mathcal{D}$, et où $0<R<1$ est suffisamment grand pour que B_R contienne le support de F. D'après la formule de Green, cette quantité vaut également

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to0}\int_{B_R\smallsetminus B_\varepsilon}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\,F(w)\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)+\frac{4s}{(1-|w|^2)^2}\right]\tilde{k}(|w|)\\&\quad+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}F(w)\left(\frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial u}\mathrm{d}v-\frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial v}\mathrm{d}u\right)\\&\quad-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\tilde{k}(|w|)\left(\frac{\partial F(w)}{\partial u}\mathrm{d}v-\frac{\partial F(w)}{\partial v}\mathrm{d}u\right),\end{aligned} \tag{16}$$

où C_ε désigne le bord de B_ε parcouru dans le sens positif (les termes similaires avec C_R sont nuls par hypothèse sur R). Bien entendu, le premier terme de (16) est nul, puisque l'intégrant l'est déjà. Le troisième terme vaut

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{k}(\varepsilon)\int_{C_\varepsilon}\left(\frac{\partial F(w)}{\partial u}\mathrm{d}v-\frac{\partial F(w)}{\partial v}\mathrm{d}u\right),$$

c'est-à-dire, en réutilisant la formule de Green :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{k}(\varepsilon)\int_{B_\varepsilon}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\left(\frac{\partial^2 F(w)}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 F(w)}{\partial v^2}\right).$$

Si M désigne une borne de la fonction entre parenthèses dans l'intégrant, toute l'intégrale est bornée par $M\,\mathrm{vol}_{\mathrm{eucl}}(B_\varepsilon)|\tilde{k}(\varepsilon)| = M\pi\varepsilon^2|\tilde{k}(\varepsilon)|$ qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon\to 0$ puisque la singularité de $\tilde{k}$ en 0 n'est que logarithmique. Par suite, le troisième terme de (16) est nul également. Pour traiter le deuxième terme, on passe en coordonnées polaires : si $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, alors

$$\frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial u}=\frac{\partial r}{\partial u}\tilde{k}'(r)=\frac{u}{r}\tilde{k}'(r),\qquad \frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial v}=\frac{v}{r}\tilde{k}'(r),\qquad \mathrm{d}\theta=\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{r^2},$$

si bien que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\left(\frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial u}\mathrm{d}v-\frac{\partial\tilde{k}(|w|)}{\partial v}\mathrm{d}u\right)F(w) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{k}'(\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{C_\varepsilon}(u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u)F(w)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\tilde{k}'(\varepsilon)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,F(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\\ &= F(0)\end{aligned}$$

d'après le « lemme des moyennes circulaires », puisque $\tilde{k}'(\varepsilon)$ se comporte comme $1/(2\pi\varepsilon)$ quand $\varepsilon\to 0$ (cf. (15)) et puisque F est holomorphe sur $\mathcal{D}$.

En résumé, nous venons donc de démontrer que

$$\int_{\mathcal{H}}\mathrm{d}\mu(z)\,k(z,\zeta)[(\Delta+s)f](z)=F(0)=f(\zeta).$$

En vertu de la symétrie de k, cette équation est équivalente à (10), cqfd. ✓

Nous passons maintenant au noyau de Green associé au quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, où Γ est défini comme aux paragraphes précédents. L'idée est simple, elle consiste simplement à « moyenner » modulo Γ le noyau que nous venons de définir sur $\mathcal{H}$. Rappelant que χ désigne un caractère unitaire de Γ, posons, pour tous $z,\zeta\in\mathcal{H}$ non situés dans la même Γ-orbite,

$$K(z,\zeta)=\sum_{\gamma\in\{\pm I\}\backslash\Gamma}\chi(\gamma)^{-1}k(z,\gamma\cdot\zeta)=\sum_{\gamma\in\{\pm I\}\backslash\Gamma}\chi(\gamma)k(\gamma\cdot z,\zeta),\tag{17}$$

la dernière égalité résultant de la symétrie de k.

Proposition 17. *La fonction K possède les propriétés suivantes :*

1) *K est bien définie et analytique sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ privé des couples (z,ζ) tels que z et ζ soient dans la même Γ-orbite;*

2) $(\Delta_z+s)K(z,\zeta)=0$*;*

3) $\lim_{y\to 0}K(z,\zeta)=0$*;*

4) *pour tous $z,\zeta\in\mathcal{H}$, $K(z,\zeta)=\overline{K(\zeta,z)}$;*

5) $K(z,\zeta)\sim\frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|$ *au voisinage de $z=\zeta$;*

6) *pour tous* $\gamma \in \Gamma$ *et tous* $z, \zeta \in \mathcal{H}$, $K(\gamma \cdot z, \zeta) = \chi(\gamma) K(z, \zeta) = K(z, \gamma^{-1} \cdot \zeta)$*;*

7) *pour toute* $f \in C_c^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H})$,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(\zeta)\, K(z, \zeta)[(\Delta + s) f](\zeta) = f(z). \tag{18}$$

Démonstration. Montrons que la série définissant K converge absolument et uniformément. Dans (17), chaque terme a une valeur absolue qui vaut $k(z, \gamma \cdot \zeta) = k(\gamma^{-1} \cdot z, \zeta) = \tilde{k}(|C_\zeta(\gamma^{-1} \cdot z)|)$, en vertu des résultats de la proposition précédente. Pour $0 < r < 1$, notons

$$N(r) = |\{\gamma \in \Gamma : |C_\zeta(\gamma \cdot z)| < r\}|,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{k}(|C_\zeta(\gamma^{-1} \cdot z)|) &= \lim_{R \to 1} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ |C_\zeta(\gamma^{-1} \cdot z)| < R}} \tilde{k}(|C_\zeta(\gamma^{-1} \cdot z)|) \\
&= \lim_{R \to 1} \int_0^R \mathrm{d}N(r)\, \tilde{k}(r) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}N(r)\, \tilde{k}(r). \qquad (19)
\end{aligned}$$

Or on peut démontrer (nous ne le ferons pas) qu'il existe une constante C telle que, pour tout $0 < r < 1$, on ait

$$N(r) \leq \frac{Cr^2}{1 - r^2}.$$

En utilisant les estimées (11), on en déduit sans peine la convergence de l'intégrale (19), cqfd.

Les autres propriétés de la fonction K découlent, pour l'essentiel, directement de celles de k. Mentionnons seulement que (18) se prouve comme (10), mais produit deux termes supplémentaires par rapport à (16), dans lesquels l'intégration s'effectue sur le bord d'un domaine fondamental. En utilisant la formule de Green, ces deux termes donnent l'intégrale d'une 2-forme exacte sur le domaine fondamental compact, donc s'annulent. ✓

Nous pouvons enfin énoncer le résultat que nous visions dans ce paragraphe.

Corollaire 18. *Considérons le Laplacien hyperbolique* $\Delta = \Delta_0$ *agissant sur* $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, 0)$.

1) *La suite* (λ_i) *de ses valeurs propres vérifie* $\sum_i \lambda_i^{-2} < \infty$*, donc tend vers* $+\infty$.

2) Δ *admet une extension autoadjointe à tout* $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, 0)$.

Comme nous l'avons déjà mentionné, ce résultat reste valable pour tous les Laplaciens à poids Δ_k et la preuve est similaire. Rappelons également que $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}) = L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \mathbf{1}, 0)$, où $\mathbf{1}$ désigne le caractère trivial.

Démonstration. Fixons un $s > 0$, et considérons l'opérateur intégral R dont le noyau est la fonction de Green K associée à $\Delta + s$ par (17), c'est-à-dire l'opérateur de résolvante :

$$Rf(z) = \int_{\Gamma\backslash\mathcal{H}} \mathrm{d}\mu(\zeta)\, K(z, \zeta) f(\zeta).$$

D'après le '`specdisc`' il existe une base (ϕ_i) de $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, 0)$ formée de fonctions propres de Δ. Notons λ_i la valeur propre correspondant à ϕ_i. En utilisant la formule (18), on voit que $R\phi_i = (\lambda_i + s)^{-1}\phi_i$ pour tout i. Comme il est clair que R est un opérateur de Hilbert-Schmidt (la singularité logarithmique sur la diagonale est largement compensée par la mesure), on en déduit que la série $\sum_i (\lambda_i + s)^{-2}$ converge. Ceci prouve le premier point du corollaire.

Soit U le sous-espace vectoriel de $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, 0)$ formé des fonctions $\sum a_i \phi_i$ vérifiant $\sum (\lambda_i |a_i|)^{-2} < \infty$. Pour $\phi \in U$, posons

$$L\phi = L(\sum a_i \phi_i) := \sum \lambda_i a_i \phi_i.$$

En utilisant le fait que les λ_i tendent vers l'infini, on constate aisément que L est une extension fermée de Δ qui est autoadjointe. ✓

En réalité, on peut être plus précis sur la nature des valeurs propres des Δ_k. Dans un exposé ultérieur[9] sera en effet démontré le résultat suivant.

Théorème 19. *Soit λ une valeur propre de Δ_k agissant sur $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, \chi, k)$. Alors*

(i) *ou bien $\lambda = \frac{p}{2}(1 - \frac{p}{2})$ avec $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $1 \leq p \leq k$ et $p \equiv k$ [2];*

(ii) *ou bien $\lambda \geq 0$ si k est pair et $\lambda \geq \frac{1}{4}$ si k est impair.*

Par exemple, les valeurs propres de Δ_1 sont $\geq \frac{1}{4}$, mais on peut seulement dire que celles de Δ_0 sont positives (ce qui ne nous apprend rien, cf. (9)).

Bibliographie

D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Univ. Press, 1996.

P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Math. 106, Birkhaüser, 1992.

A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groupes*, Princeton Univ. Press, 1986.

9. Cet exposé sera probablement intitulé *Représentations unitaires irréductibles de $GL^+(2, \mathbb{R})$*.