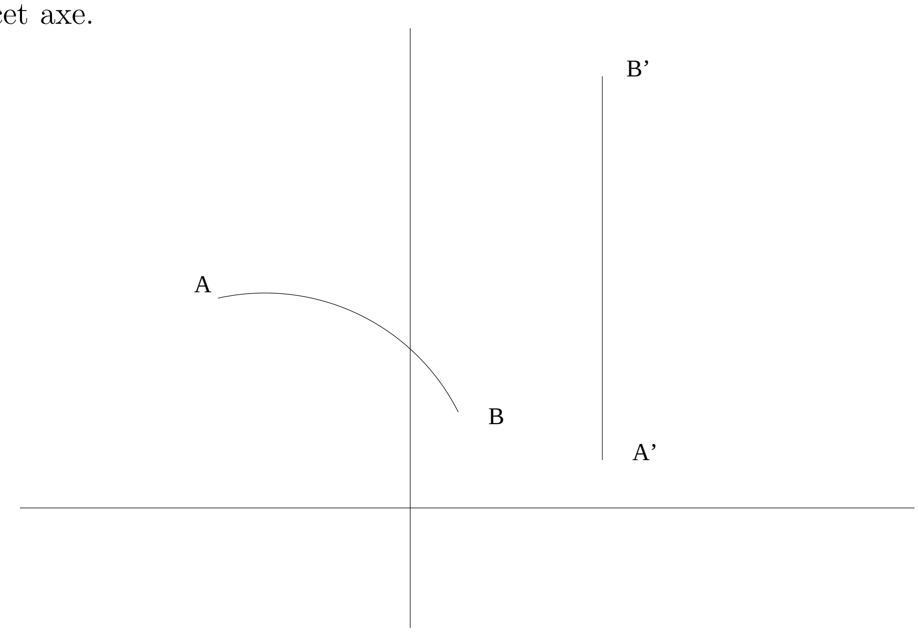
1 Géométrie hyperbolique

1.1 Demi-plan de Poincaré

Le demi plan de Poincaré $\mathbb{H}$ est l'ensemble des complexes z de partie imaginaire > 0. Il est muni de la métrique riemannienne

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

pour laquelle les géodésiques sont les cercles centrés sur l'axe des x ou les demi-droites perpendiculaires à cet axe.



Pour mémoire,

$$(g_{i,j}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix},$$

les symboles de Christoffel sont

$$\begin{array}{cccc} \Gamma^1_{11} = 0 & \Gamma^1_{22} = 0 & \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y} & \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{y} \\ \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y} & \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y} & \Gamma^2_{12} = 0 & \Gamma^2_{21} = 0 \end{array}.$$

La distance géodésique ou hyperbolique entre les points $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ est donnée par la formule

$$\mathrm{ch}(d(z, z')) = \frac{(x - x')^2 + y^2 + y'^2}{2yy'} \quad \text{dans tous les cas,} \quad d(z, z') = 0 \left|\ln(\frac{y'}{y})\right| \quad \text{si} \quad x = x'.$$

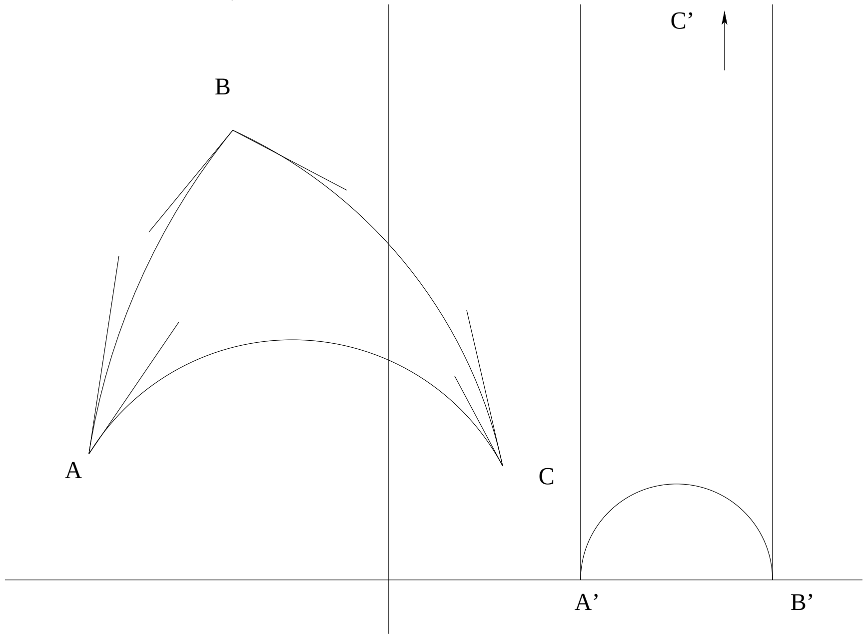
L'élément d'aire est

$$\frac{dx\ dy}{y^2}.$$

L'aire d'un triangle de sommets A, B et C (et d'angles aux sommets $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$) est

$$\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}.$$

Si les trois angles sont à l'infini (deux sur l'axe des x et un "en haut" par exemple) l'aire est π.



1.2 Action du groupe des homographies réelles

Soit

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

Ce groupe agit sur $\mathbb{H}$ par

$$\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{[(ax+b)(cx+d) + acy^2] + iy}{(cx+d)^2 + (cy)^2}.$$

On remarque que γ et $-\gamma$ agissent de la même façon, ce qui permet de considérer $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{I,-I\}$. C'est l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{H}$.

Propriétés :

- La métrique, la distance hyperbolique, l'aire sont invariantes sous l'action de $(P)SL(2,\mathbb{R})$. Les géodésiques sont transformées en géodésiques.
- Le point i est laissé invariant par $SO(2)$ (les rotations).
- Le groupe $(P)SL(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$ (une seule orbite : on peut envoyer n'importe quel point de $\mathbb{H}$ sur n'importe quel autre).
- Le demi plan $\mathbb{H}$ est un espace homogène. C'est le quotient $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$. On identifie un point z de $\mathbb{H}$ à l'ensemble des homographies qui envoient i sur z.

Cercles isométriques

Soit $\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est un élément de $SL(2,\mathbb{R})$. Si $z = x + iy \in H$, notons $Z = X + iY = \gamma \cdot z$. On a la relation :

$$\left(X - \frac{a}{c}\right)^2 + Y^2 = \frac{1}{c^4\left[\left(x + \frac{d}{c}\right)^2 + y^2\right]}.$$

Donc si

$$(x + \frac{d}{c})^2 + y^2 \leq r^2, \text{ alors } (X - \frac{a}{c})^2 + Y^2 \geq \frac{1}{c^4 r^2}.$$

On appelle *cercle isométrique* de γ le cercle de centre $\alpha = -\frac{d}{c}$ et de rayon $|c|^{-1}$. Ce cercle est transformé par γ en le cercle de centre $\frac{a}{c}$ et de même rayon (qui est le cercle isométrique de γ^{-1}). L'intérieur du cercle isométrique de γ est envoyé sur l'extérieur du cercle isométrique de γ^{-1}.

1.3 Classification des homographies complexes

Soit $SL(2,\mathbb{C})/\{-I, I\}$. C'est l'ensemble des homographies complexes. Elles ne conservent pas le demi-plan mais c'est plus commode pour classer et conjuguer. On considérera qu'elles vont de $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ dans lui-même en convenant que

$$g \cdot \infty = \tfrac{a\infty + b}{c\infty + d} = \tfrac{a}{c} \quad (= \infty \text{ si } c = 0),$$

$$g \cdot \tfrac{-d}{c} = \infty.$$

Résultat 1 *Si (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont deux triplets de points deux à deux distincts de $\overline{\mathbb{C}}$, il existe une unique homographie g telle que $g \cdot \alpha = \alpha', g \cdot \beta = \beta', g \cdot \gamma = \gamma'$.*

On passe par $0, 1, \infty$.

Résultat 2 *les homographies conservent le birapport :*

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \overline{\mathbb{C}}, \qquad [g(\alpha), g(\beta), g(\gamma), g(\delta)] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta], .$$

avec

$$[\alpha, \beta, \gamma, \delta] = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} : \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}.$$

Résultat 3 *Soient deux familles de quatre éléments distinct de $\overline{\mathbb{C}}$, $(z_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(z'_i)_{1 \leq i \leq 4}$. Il existe une homographie g vérifiant $g(z_i) = z'_i, 1 \leq i \leq 4$ si et seulement si $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z'_1, z'_2, z'_3, z'_4]$.*

Définition 4 *Une homographie différente de l'identité est dite parabolique si elle a un seul point fixe dans $\overline{\mathbb{C}}$. Une homographie $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est parabolique si et seulement si sa trace vaut ± 2. L'homographie est alors conjuguée à la translation $z \mapsto z + 1$.*

Résultat 5 *Soit $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une homographie non parabolique (et pas l'identité). Alors g a deux valeurs propres distinctes λ et μ et elle est conjuguée à l'homographie $z \mapsto \frac{\lambda}{\mu} z$ (qui a pour points fixes 0 et ∞). Si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est réel > 0, l'homographie est hyperbolique, si le rapport est de module 1, l'homographie est dite elliptique. Si $\frac{\lambda}{\mu}$ est dans $\mathbb{C}$ privé du cercle unité, l'homographie est loxodromique (cela comprend le cas hyperbolique).*

Dans le cas où g est une matrice réelle de trace $\neq \pm 2$, les valeurs propres λ et μ sont réelles et de même signe si $|a + d| > 2$, complexes conjuguées de module 1 si $|a + d| < 2$.

2 Sous-groupes discrets

2.1 Généralités

Définition 6 *(Maskit) Un sous-groupe G du groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ agit de manière " discontinue" en z_0 de $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ si z_0 admet un voisinage V, tel que $\gamma \cdot V \bigcap V \neq \emptyset$ seulement pour un nombre fini d'éléments γ de G.*
L'ensemble des points auxquels G agit discontinument est appelé "set of discontinuity" ou "regular set" et se note $\Omega = \Omega(G)$.

Résultat 7 *Un point x est dans $\Omega(G)$ si et seulement*
- $\mathrm{Stab}(x)$ *est fini et*
- *x a un voisinage U tel que $\gamma \cdot U = U$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Stab}(x)$ et $\gamma \cdot U \bigcap U = \emptyset$ pour tous les autres γ.*

Définition 8 *Un sous-groupe G du groupe $PSL(2,\mathbb{C})$ agit sur $\mathbb{C}$ de manière "librement discontinue" (Maskit) s'il existe un point z_0 de $\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ admettant un voisinage V qui vérifie la condition suivante :*

$$\forall \gamma \in G \setminus \{id\}, \gamma \cdot V \bigcap V = \emptyset.$$

Le voisinage V est appelé convenable et le groupe G est dit kleinien (Maskit). L'ensemble des points z_0 admettant un voisinage convenable est ouvert et on le note ${}^0\Omega(G)$ et on l'appelle free regular set.

C'est plus restrictif car le voisinage est disjoint de tous les autres et non de tous les autres, sauf un nombre fini.

Résultat 9 *L'ensemble ${}^0\Omega(G)/G$ est un espace séparé (Hausdorff).*

Un groupe Kleinien est discret mais la réciproque n'est pas vraie (Maskit) mais j'ai pas regardé le contreexemple. En revanche, un sous groupe discret de $PSL(2,\mathbb{R})$ agit discontinument en tout point de $\mathbb{H}$. Conséquence de la définition du groupe L^2 des isométries (directes et indirectes) de $\mathbb{H}$, du fait que $PSL(2,\mathbb{R})$ est canoniquement isomorphe à L^{2+} (isométries directes) et du résultat, valable pour un sous-groupe discret de L^2 .

2.2 Critères et implications variés

Soit G un groupe agissant librement discontinument. On suppose que $\infty \in^0 \Omega(G)$. Si $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est l'élément générique de G, aucun g différent de l'identité n'a son coefficient "c" nul (car ces éléments fixent ∞). On a

Résultat 10 *Si $\infty \in^0 \Omega(G)$, alors*

$$\sum_{g\in G, g\neq \mathrm{id}} |c|^{-4} < +\infty.$$

preuve technique. Il faut estimer par la somme des mesures des $g(U)$ (sur la sphère) où U est un voisinage convenable de ∞ et mettre ca en rapport avec le diamètre des cercles isométriques des transformations.

Résultat 11 *Supposons que $\infty \in^0 \Omega(G)$. Soit (g_n) une suite injective d'éléments de G, ($\rho_n = \frac{1}{|c_n|}$) étant la suite des rayons des cercles isométriques. Alors $\rho_n \to 0$.*

Autres trucs techniques mais des fois ca pourrait servir

Résultat 12 *Si f et g sont des éléments non triviaux de $PSL(2, \mathbb{C})$, avec f loxodromique, si f et g ont exactement un point fixe en commun, alors $< f, g >$ n'est pas discret.*

Résultat 13 *Inégalité de Jørgensen*
On suppose que f et g engendrent un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{C})$, que f est loxodromique, que f et g n'ont pas de point fixe en commun et que g ne laisse pas invariant l'ensemble des points fixes de f. Alors
$$|\mathrm{tr}^2(f) - 4| + |\mathrm{tr}([f, g]) - 2| \geq 1.$$

Un groupe de transformations de Möbius engendré par deux générateurs f et g est caractérisé, à conjugaison près, par trois nombres complexes, ses paramètres. Un choix de paramètres est le suivant :

$$\gamma(f, g) = \mathrm{tr}([f, g]) - 2,\ \ \beta(f) = \mathrm{tr}^2(f) - 4,\ \ \beta(g) = \mathrm{tr}^2(g) - 4.$$

(Gehring Gilman Martin qui se réfèrent à Leutbecher, Shimizu et Jørgensen). L'article cité en référence étudie les groupes de paramètres $(\gamma, \beta, -4)$ avec β et γ réels et décrit la région du plan pour laquelle ces groupes sont discrets. On peut citer le lemme

Résultat 14 *On suppose que $< f, g >$ a pour paramètres $(\gamma, \beta, -4)$ avec $\gamma \geq \beta$ et que f est un élément primitif elliptique d'ordre $q \geq 3$, c'est-à dire qu'il correspond à une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{q}$. Alors $< f, g >$ est discret ssi l'une des conditions suivantes est réalisée :*
- *$\gamma - \beta = 4\cos^2(\pi/r)$ pour un certain entier $r > \frac{2q}{q-2}$.*
- *$\gamma - \beta \geq 4$.*
- *$\gamma - \beta = (\beta + 2)^2$ et q est impair.*

Il y en a un autre avec γ plus petit que β. Et ce résultat là (Maclachlan et Martin) :

Résultat 15 *Soient f et g elliptiques, primitifs, d'ordres n et m (avec $n \geq m$ et $n \neq 2$). Soit*

$$d(m, n) = 4(\cos^2(\pi/m) + 1)(\cos^2(\pi/n) + 1) + 16\cos(\pi/m)\cos(\pi/n).$$

Si γ est en dehors de l'ellipse

$$\|z + 4\sin^2(\pi/n)\sin^2(\pi/m)\| + \|z\| = d(n, m),$$

alors $< f, g >$ est discret et isomorphe au produit libre $< f > * < g >$.

2.3 Domaines fondamentaux. Théorème de Poincaré

Définition 16 *Soit G un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$. Un polygone D est un polygone fondamental de G si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout élément γ non trivial de G, $\gamma \cdot D \bigcap D = \emptyset$.*
2. *Pour tout z de $\mathbb{H}$, il existe $\gamma \in G$ tel que $\gamma \cdot z \in \overline{D}$.*
3. *Les côtés de D sont appariés par des éléments de G : pour tout côté s de D, il existe un côté s' de D et un élément γ_s de G tel que $\gamma_s \cdot s = s'$. De plus, $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$ et $(s')' = s$. L'élément γ_s est appelé "appariant" (side-pairing).*
4. *Tout compact de $\mathbb{H}$ rencontre seulement un nombre fini de translatés de D par le groupe G.*

C'est un cas particulier de la notion de domaine fondamental

Pour être complets, on va décrire comment on construit les cycles (de sommets, de côtés appariés et d'applications appariantes qui vont avec).On commence par un sommet e_1 qui est l'intersection de s_1 et d'une autre face. Une application appariante γ_1 envoie s_1 sur s'_1. On note $e_2 = \gamma_1 \cdot e_1$, c'est un sommet intersection de deux faces, s'_1 et une autre face qu'on appelle s_2. On recommence avec e_2 et s_2 et on continue. On retombe sur e_1 car le polygone a un nombre fini de sommets. La suite de sommets (e_n) est périodique, ainsi que les suites (γ_n) et $((s_n, s'_n))$ d'aplications appariantes et de faces appariées. On note k la plus petite *période* commune à toutes ces suites.

On appelle $\{e_1, \ldots, e_k\}$ le *cycle* de sommets, on pose $h = \gamma_k \circ \gamma_{k-1} \circ \cdots \circ \gamma_1$, c'est la *transformation du cycle* ("cycle transformation"). On remarque que $h(e_1) = e_1$.

Deux cycles sont équivalents s'ils ont mêmes sommets, un sommet est exactement dans une classe de cycles, un sommet peut apparaître deux fois dans un cycle mais pas plus.

Le théorème de Poincaré, qui suit, donne des conditions suffisantes pour qu'un polygone D donné, accompagné d'un ensemble de transformations T, soit un polygone fondamental pour le groupe G engendré par ces transformations.

Conditions

Pour tout côté s de D, il existe un côté s' de D et un élément γ_s de T tel que
(1) $\gamma_s \cdot s = s'$.
(2) $\gamma_{s'} = \gamma_s^{-1}$. (relation de réflexion)
Les γ_s sont les transformations appariantes. Elles forment l'ensemble T.
(3) $\gamma_s \cdot D \bigcap D = \emptyset$.
On a une relation d'équivalence sur $\overline{D}$: z est équivalent à z' s'il existe $\gamma \in T$ tel que $\gamma \cdot z = z'$.
(4) Chaque classe d'équivalence sur $\overline{D}$ a un cardinal fini.
Conditions sur les cycles et les angles :
(5) Pour tout sommet e, la transformation (du cycle auquel appartient e) h est d'ordre fini, $t (\in \mathbb{N}^*)$. (relation de cycle).
Soit $\alpha(e)$ l'angle, mesuré à l'intérieur de D, au sommet e. Si e appartient au cycle $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ on impose
(6) $\displaystyle\sum_{m=1}^{k} \alpha(e_m) = \frac{2\pi}{t}$.
(7) Condition demandant qu'un domaine D^* sur lequel on définit une distance soit complet, mais si D est relativement compact dans $\mathbb{H}$ cette condition est satisfaite.

Résultat 17 *Théorème de Poincaré*
Soit D un polygone, accompagné d'un ensemble de transformations T, le tout vérifiant les conditions (1) *jusqu'à* (7). *Alors G, le groupe engendré par T, est discret, D est un polygone fondamental de G et les relations de réflexion et les relations de cycles forment un ensemble complet de relations pour G.*

D'autres exemples de domaines fondamentaux :

Pour un élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de $(P)SL(2, \mathbb{R})$, soit D_g l'extérieur du cercle isométrique de g :

$$D_g = \{z \in \mathcal{C} : |cz + d|^2 > 1\}.$$

Définition 18 *Soit G un sous-groupe kleinien de $(P)SL(2, \mathbb{R})$, tel que $\infty \in^0 \Omega$. Le domaine* *de Ford de G est l'ensemble suivant :*

$$\dot{\bigcap_{g\in G, g\neq \mathrm{id}}} D_g.$$

C'est un domaine fondamental pour G.

Définition 19 *Soit G un sous-groupe kleinien de $(P)SL(2,\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{O}$ un point de $\mathbb{H}$, qui n'est fixé par aucun élément non trivial de G. Pour tout élément non trivial g de G, soit Δ_g l'ensemble des points de $\mathbb{H}$ plus proches de $\mathcal{O}$ que de $g \cdot \mathcal{O}$:*

$$\Delta_g = \{z \in H : d(z,\mathcal{O}) < d(z, g\cdot\mathcal{O}).$$

Le domaine de Dirichlet de G centré sur $\mathcal{O}$ est

$$D = \bigcap_{g\in G, g\neq \mathrm{id}} \Delta_g.$$

C'est un polygone fondamental pour G.

3 Le groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$.

3.1 Définition, sous-groupes de congruences

Le *groupe modulaire* $SL(2,\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices réelles à coefficients entiers (relatifs) de déterminant 1. Il est engendré par les homographies suivantes :

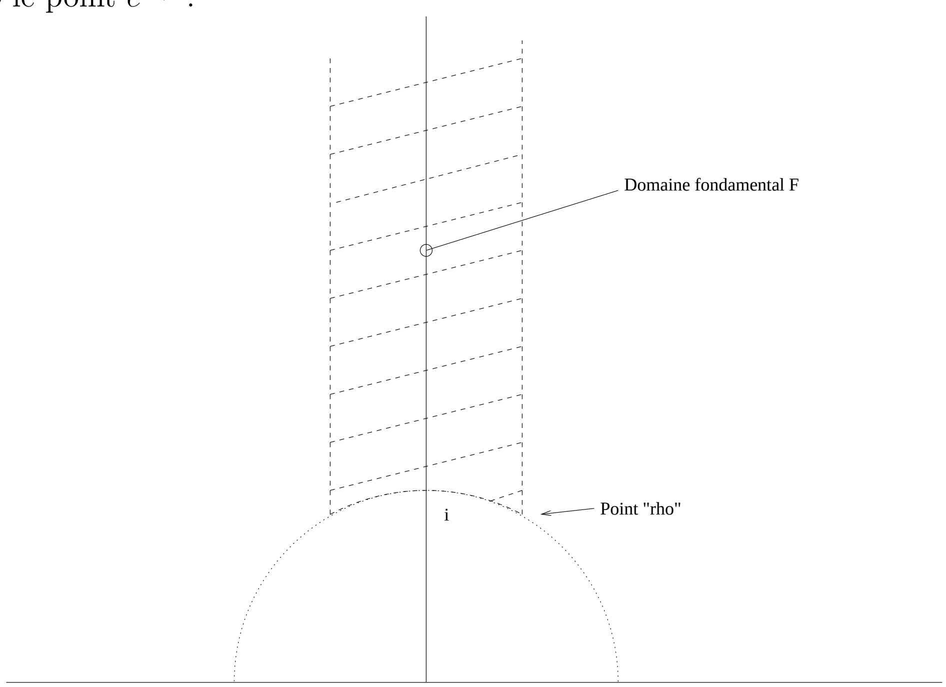
$$T : z \mapsto z+1 \text{ et } S : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

On constate que S est d'ordre 2 et ST, d'ordre 3 et l'on peut montrer que $SL(2,\mathbb{Z})$ est le produit libre des groupes $< S >$ et $< ST >$. (Koecher-Krieg, p 108) (Serre p 131)

Son *domaine fondamental* :

$$\mathbb{F} = \{z \in \mathbb{H} : |z| > 1, -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\}.$$

On appelle ρ le point $e^{i\pi/3}$.



Soit Λ un sous groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$, soit $\Lambda' = < \Lambda, -I >$. On peut écrire

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \bigcup_{1\leq \nu \leq [SL(2,\mathbb{Z}):\Lambda']} \Lambda' M_\nu,$$

la somme est finie ou dénombrable, les M_ν sont un système de représentants des classes à droite de $SL(2,\mathbb{Z})$. On pose

$$\mathbb{F}(\Lambda) = \bigcup_{1\leq \nu \leq [SL(2,\mathbb{Z}):\Lambda']} M_\nu \overline{\mathbb{F}}.$$

C'est un *domaine fondamental* pour Λ. Les *pointes du domaine* sont les $M_\nu \cdot \infty$. (Spitzen).

Soit n un entier ≥ 2. On note

$$\Gamma(n) = \{M \in SL(2,\mathbb{Z}) : M \equiv I(\mod n)\}.$$

L'égalité s'entend coefficient par coefficient. Pour tout entier a, on note $\overline{a}$ la classe de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour toute matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on note $\overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{bmatrix}$. On a le résultat :

Résultat 20 *L'application*

$$\begin{array}{l} SL(2,\mathbb{Z}) \to SL(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ M \mapsto \overline{M} \end{array}$$

est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est $\Gamma(n)$.

Donc $\Gamma(n)$ est distingué dans $SL(2,\mathbb{Z})$, d'indice fini dans $SL(2,\mathbb{Z})$ parce que le quotient est isomorphe à $SL(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (qui a pour cardinal $n^3\prod_{d|n}(1-d^{-2})$). On l'appelle *principal groupe de congruence modulo* n, n étant le *degré* de $\Gamma(n)$.

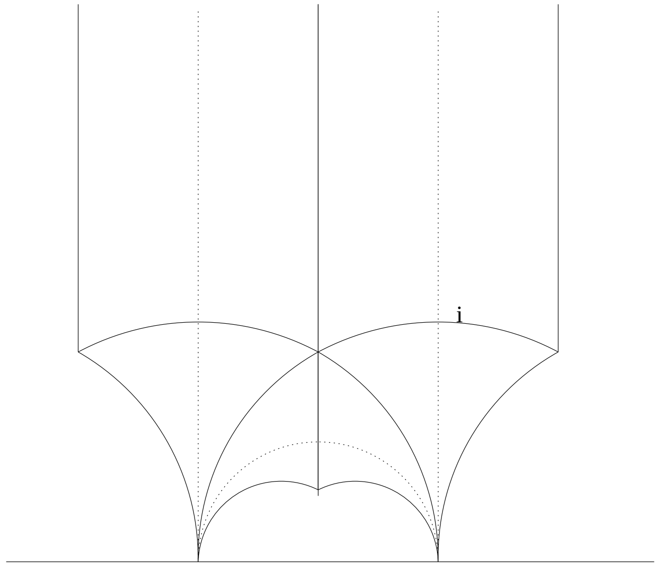
Pas de point fixe (si $M \cdot z = z$ et $M \in \Gamma(n)$, M est l'identité).

Exemple : $\Gamma(2)$
Matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de déterminant $= \overline{1}$. On élimine celles avec 4 zéros et 4 un, de même que celles avec 3 zéros (4) et celles avec 2 sur la même ligne ou la même colonne (4) ce qui fait 10 sur les $2^4 = 16$. Il en reste six, qui sont les images des matrices suivantes (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) (déterminant $= 1$) :

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad -UT = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U(= -TS) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad U^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ca nous fait un domaine fondamental constitué de six copies de $\mathbb{F}$.



D'autre part, $SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(2)$ est isomorphe au groupe des permutations Σ_3. En effet, les matrices $\overline{Id}, \overline{T}, \overline{-UT}, \overline{S}, \overline{U}, \overline{U^2}$ permutent les vecteurs suivants de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$\begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}.$$

Un sous-groupe Λ de $SL(2,\mathbb{Z})$ est appelé *groupe de congruence* s'il existe n tel que $\Gamma(n) \subset \Lambda$. Le plus petit n convenant est appelé degré de Λ. Un sous-groupe de congruence a un indice fini dans $SL(2,\mathbb{Z})$.
Un exemple important :

$$\Gamma_0(n) = \{M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, c \equiv 0 \mod n\}.$$

Par exemple pour $n = 2$, un système de représentants (des classes à droite) est

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ca donne un domaine fondamental en trois morceaux. Il y a aussi $\Gamma^0(n)$, où c'est b qui est pair. Comme $(SL(2,\mathbb{Z})/\Gamma(2)) \simeq \Sigma_3$, comme Σ_3 a trois sous-groupes d'ordre 2 (et d'indice 3), il existe trois sous-groupes de congruence Λ (tels que $\Gamma(2) \subset \Lambda \subset SL(2,\mathbb{Z})$ avec inclusions strictes). Ce sont $\Gamma_0(2), \Gamma^0(2)$ et un troisième qui s'appelle $\Gamma_\theta(2)$ et qui est

$$\Gamma_\theta(2) = \Gamma(2) \cup \Gamma(2) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

c'est-à dire

$$\begin{aligned} \Gamma_\theta(2) &= \{M \in SL(2,\mathbb{R}) : M \equiv I \;(\mod n) \quad \text{ou} \quad M \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;(\mod n)\} \\ &= \{M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) : a+b+c+d = 0 \mod 2\}. \end{aligned}$$

Enfin Σ_3 a un sous-groupe d'ordre 3 (et d'indice 2). Le sous-groupe de congruence lui correspondant est

$$\Gamma_N(2) = \Gamma(2) \bigcup \Gamma(2)U \bigcup \Gamma(2)U^2.$$

3.2 Périodes des fonctions elliptiques

Une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$ est dite elliptique s'il existe des complexes ω_1 et ω_2, indépendants sur $\mathbb{R}$, tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z).$$

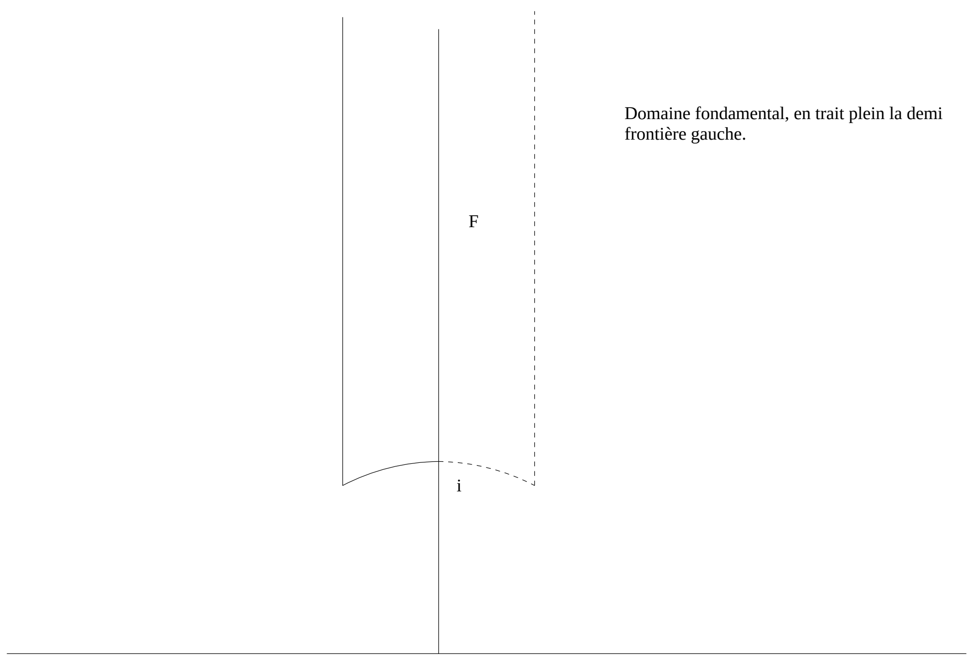
Une fonction elliptique peut admettre plusieurs couples de périodes. L'ensemble $\{m\omega_1 + n\omega_2, (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un réseau de $\mathbb{C}$. Le couple (ω_1, ω_2) en est une base (base d'un réseau = base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, telle que tout élément du réseau soit combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de la base). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Le couple (ω'_1, ω'_2) est une base du réseau
2. Il existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ tel que

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}.$$

Puisque $\mathbb{F}$ est le domaine fondamental de $SL(2,\mathbb{R})$, on peut choisir $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ dans $\overline{\mathbb{F}}$ et même plus précisément dans

$$\mathbb{F}^g = \mathbb{F} \cup \left\{ -\frac{1}{2} + iy, y \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \cup \{z \in \mathbb{H} : |z| = 1, -1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 0\}.$$



Domaine fondamental, en trait plein la demi frontière gauche.

C'est $\mathbb{F}$ augmenté de sa "frontière gauche". À chaque point de ce domaine fondamental (augmenté de sa demi frontière), on peut associer un ensemble de fonctions elliptiques. C'est pour ça entre autres que c'est important mais pas seulement. On verra dans la th des formes modulaires classiques.

4 Formes modulaires holomorphes

4.1 Réseaux et inégalités dedans. Lemmes techniques.

Soit Ω un réseau dont une base est (ω_1, ω_2). On appelle *volume* de Ω la surface d'une *maille*

$$\diamondsuit(\omega_1, \omega_2) = \{z = a\omega_1 + b\omega_2 : (a, b) \in [0, 1[^2\}$$

du réseau :

$$\mathrm{vol}(\Omega) = |\mathrm{Im}(\omega_1 \overline{\omega_2})|.$$

Cela ne dépend pas de la base choisie.
On note $\delta = \sup(|z - w|, (z, w) \in \diamondsuit(\omega_1, \omega_2)^2)$ le diamètre de la maille. Le nombre de points du réseau dans le disque de rayon ρ est

$$A_\rho(\Omega) = \mathrm{Card}\left(\{w \in \Omega : |w| \le \rho\}\right).$$

On a le résultat technique

Résultat 21 *Pour tout $\rho > \delta$,*

$$\frac{\pi}{\mathrm{vol}(\Omega)}(\rho - \delta)^2 \le A_\rho(\Omega) \le \frac{\pi}{\mathrm{vol}(\Omega)}(\rho + \delta)^2$$

Dire que

$$\overline{D}(0, \rho - \delta) \subset \bigcup_{w \in \Omega, |w| \le \rho} \diamondsuit(\omega_1, \omega_2) \subset \overline{D}(0, \rho + \delta).$$

Ce lemme de convergence en découle :

Résultat 22 *La série $\sum_{w \in \Omega, w \neq 0} |w|^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.*

(Koecher-Krieg).

Résultat 23 *Pour tous entiers m, n et pour tout $z = x + iy \in \mathbb{H}$, on a*

$$|mz + n|^2 \ge \mathrm{Im}(z) e^{-d_{\mathbb{H}}(i,z)}(m^2 + n^2).$$

(avec $\mathrm{ch}(d(z, i)) = \frac{x^2+y^2+1}{2y}$.)

Dire que

$$|mz + n|^2 = (m, n) \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

et diagonaliser la matrice.

4.2 Définition et propriétés des formes modulaires

Pour tout $z \in \mathbb{H}$, on pose $q = e^{2i\pi z}$. Pour une fonction méromorphe périodique f de période 1, définie sur $\mathbb{H}$ ou sur $\mathbb{H}_R = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > R(\ge 0)\}$, on définit f_∞, méromorphe sur le disque pointé $D^*(0, e^{-2\pi R})$. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q^N f_\infty(q)$ est bornée sur $D^*(0, e^{-2\pi R})$, alors f_∞ est méromorphe sur tout le disque et admet le développement de Laurent

$$f_\infty(q) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k q^k,$$

valable dans un voisinage de $q = 0$. On appelle les c_k les coefficients de Fourier à l'infini de f, $-N$ estl'**ordre à l'infini** de f et on le note $\nu_\infty(f)$. Si c'est ≥ 0, la fonction est dite holomorphe à l'infini.

On rappelle que

$$\left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Définition 24 *Soit k un entier naturel pair. On appelle forme faiblement modulaire holomorphe de poids k une fonction f holomorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant*

$$\forall \gamma = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \in SL(2,\mathbb{Z}), \qquad f(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k f(z).$$

Une forme faiblement modulaire holomorphe est dite modulaire holomorphe (pas faiblement) si, de plus, elle est holomorphe à l'infini.

Il existe des définitions plus générales de "modulaire faiblement holomorphe de poids k", avec un sous-groupe discret Γ de $SL(2,\mathbb{R})$ au lieu de $SL(2,\mathbb{Z})$.
Avec k impair, comme le même automorphisme de $\mathbb{H}$ est représenté par une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ aussi bien que par son opposé, le facteur $(cz+d)^k$ dépend du représentant choisi et f est nulle.

Notons ainsi les ensembles suivants, pour k entier

- Les formes faiblement modulaires (relativement à $SL(2,\mathbb{Z})$) holomorphes, de poids $2k$. Parmi elles, celles qui sont méromorphes d'ordre $-N$: $f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k q^k$.
- M_{2k} : les formes modulaires holomorphes de poids $2k$. Développement à l'infini : $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k$.
- S_{2k} :les formes modulaires holomorphes nulles à l'infini, de poids $2k$: $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$. (le coefficient c_0 est nul). Une telle forme est appelée **parabolique** ou **cusp form** ou **Spitzenform**.

On peut aussi s'intéresser à celles qui sont méromorphes sur $\mathbb{H}$ (et non holomorphes sur $\mathbb{H}$). Une généralisation de la formule suivante est aussi valable pour elles.

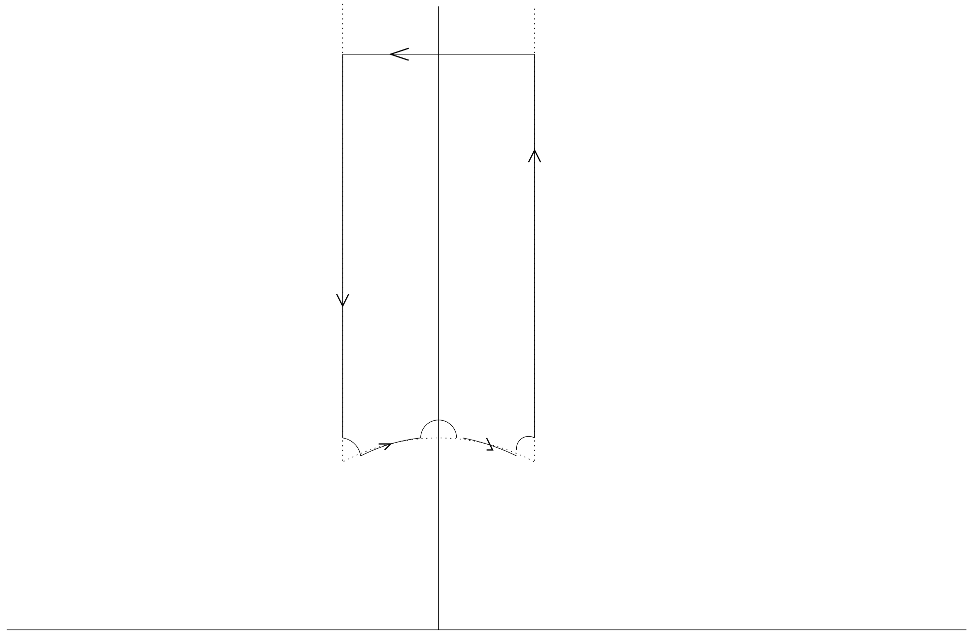
Résultat 25 Formule de poids.
Soit f une forme modulaire de poids $2k$, non nulle. On désigne par $v_p(f)$ la multiplicité de p comme zéro de f (si $f(p) \neq 0, v_p(f) = 0$). Le point ρ est $e^{i\pi/3}$. Alors on a

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}\ v_i(f) + \frac{1}{3}\ v_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{F}^g,\ p \neq i,\ p \neq -\overline{\rho}} v_p(f) = \frac{k}{6}.$$

Démonstration : dans le Serre. On intègre ceci

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz,$$

sur le contour $\mathcal{C}$



Ici on a supposé que f ne s'annule pas sur la frontière. sinon on déforme ce contour en faisant un cercle autour de chaque zéro sur la frontière (sur la partie gauche) et en reportant ces modifications sur la partie droite de la frontière, par les transformations $T : z \mapsto z+1$ et $S : z \mapsto -1/z$. Certains morceaux sont appariés par S et T, quand c'est par la translation les intégrales se compensent, quand c'est par S, il apparaît un terme dû au poids.
Conséquence : pas de forme modulaire non nulle de poids 2 ($k=1$). En effet, si l'un des v_* était non nul, le membre de gauche

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}\, v_i(f) + \frac{1}{3}\, v_\rho(f) + \sum_{p \in \mathbb{F}^g,\ p\neq i,\ p \neq -\overline{\rho}} v_p(f)$$

vaudrait au moins 1/3 et non 1/6. Si tous les v_* sont nuls, le membre de gauche vaut 0 et non 1/6.

4.3 Exemples, construction.

Définition 26 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose*

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n, d\geq 1} d^\alpha.$$

Définition 27 *La série d'Eisenstein est*

$$G_k(z) = \sum_{(m,m)\in\mathbb{Z}^2, |m|+|n|\neq 0} (mz+n)^{-k},$$

elle converge pour $k \geq 4$ et c'est une forme modulaire holomorphe de poids k.

Démonstration :
La série converge uniformément pour tout compact, utiliser l'un des lemmes de la partie "technique" (celui sur

$$|mz+n|^2 \geq \mathrm{Im}(z) e^{-d_{\mathbb{H}}(i,z)}(m^2+n^2). \quad)$$

Après, convergence de

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m^2+n^2)^s}$$

pour $s > 1$.
Modularité : il sort un facteur en $(cz+d)^k$.
Développement en l'infini : démontrer que

Résultat 28 *Pour $k \geq 2$ et $z \in \mathbb{H}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^{2k}} = \frac{(-2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1} e^{2i\pi rz}.$$

(Appliquer la formule de Poisson à $z \mapsto z^{-2k}$. Si

$$\varphi(x) = (x+iy)^{-2p}, \quad \hat{\varphi}(\xi) = 0 \text{ si } \xi < 0, \quad = (2i\pi)^{2p} \frac{\xi^{2p-1}}{(2p-1)!} e^{-2\pi y\xi} \text{ sinon.}$$

Cela donne

$$G_{2k}(z) = 2\zeta(2k) + 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n\geq 1} q^n \sigma_{2k-1}(n).$$

Définition 29 *On pose*

$$g_4 = 60G_4, \qquad g_6 = 140G_6 \qquad \text{et} \qquad \Delta = g_4^3 - 27g_6^2.$$

C'est une cusp-form (fonction delta de Ramanujan) d'ordre 12.

Si $h \in M_{2k}$ et si d est entier positif, h^d est dans M_{2kd}, donc g_4^3 et g_6^2 sont dans M_{12} et les coefficients ont été choisis pour que les termes constants à l'infini s'annulent.
La fonction Δ a le développement de Fourier à l'infini

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{2i\pi mz}, \quad \text{avec } \tau(1) = 1.$$

Les coefficients $\tau(m)$ sont entiers. La fonction τ est appelée "fonction τ de Ramanujan" et vérifie $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ si m et n sont premiers entre eux.(admis. Une démonstration utilise les opérateurs de Hecke).

4.4 Dimensions des espaces de formes modulaires et paraboliques

Résultat 30

1. *$M_{2k} = \{0\}$ pour $k < 0$ et $k = 1$.*
2. *Pour $k = 0$, M_0 est de dimension 1, contient les fonctions constantes et $S_0 = \{0\}$. Pour $k = 2, 3, 4, 5$, $M_{2k} =< G_{2k} >$ est de dimension 1 et $S_{2k} = \{0\}$.*
3. *Pour $2k \geq 12$, la multiplication par Δ est un isomorphisme de M_{2k-12} sur S_{2k}.*
4. *Pour $k \geq 2$, $M_{2k} = S_{2k} \oplus \mathbb{C}G_{2k}$*

Démonstration :
Pour $k = 0$: une forme modulaire non nulle d'ordre 0 ne s'annule pas (formule de poids). Si f en est une, $f - f(p)$ en est une aussi, qui s'annule en p, donc qui s'annule partout.
On utilise la formule de poids pour situer les zéros des formes modulaires de poids "petit". Par

exemple pour $k = 2$, un zéro d'ordre 1 en ρ et c'est tout. Le quotient de deux formes modulaires d'ordre 4 est une forme modulaire d'ordre 0, donc une constante, donc $M_4 = \mathbb{C}G_4$. Comme $G_4(\infty) = 2\zeta(4) \neq 0$, $S_4 = \{0\}$.
Multiplier par Δ envoie bien M_{2k-12} dans S_{2k}. La formule de poids montre que Δ a un zéro d'ordre 1 en ∞ et c'est tout. Diviser une forme de S_{2k} par Δ fournit donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$, à l'infini, et d'ordre $2k - 12$.
Enfin, si $f \in M_{2k}$ pour $k \geq 2$,

$$f - \frac{f(\infty)}{G_{2k}(\infty)} G_{2k}$$

est dans M_{2k} et s'annule en l'infini.

Résultat 31 *Alors toute forme modulaire est dans l'algèbre engendrée par G_4 et G_6.*

On a les constantes (ordre 0), les formes d'ordre 4 et 6, G_4^2 est non nulle d'ordre 8 donc engendre M_8 que l'on sait de dimension 1, pareil pour M_{10}. Par récurrence : supposons que les formes modulaires d'ordre inférieur ou égal à $2k$ soient des polynomes en G_4 et G_6. Pour $2k+2$, on a $M_{2k+2} = \Delta M_{2k-10} + \mathbb{C}G_{2k+2}$. On peut fabriquer une forme modulaire non nulle en l'infini et d'ordre $2k+2$ à l'aide de G_4 et G_6. On peut s'en servir pour se ramener dans ΔM_{2k-10} et utiliser là l'hypothèse de récurrrence.

Résultat 32 *Pour $k \geq 0$, M_{2k} est de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et*

$$\dim M_{2k} = \left[\tfrac{2k}{12}\right] \text{ si } k = 1 \mod 6$$

$$\dim M_{2k} = \left[\tfrac{2k}{12}\right] + 1 \text{ si } k \neq 1 \mod 6$$

De même, les identifications, par exemple $G_4^2 = \text{cste}.G_8$, donnent des relations entre les coefficients (entre les $\sigma_\alpha(n)$.) Posons

Définition 33

$$E_{2k} = \tfrac{G_{2k}}{2\zeta(2k)} \qquad g_4 = \tfrac{4\pi^4}{3}E_4, \quad g_6 = \tfrac{8\pi^6}{27}E_6$$

$$E_4 = 1 + 240\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n \qquad E_6 = 1 - 504\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n$$

$$E_8 = 1 + 480\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^n \qquad E_{10} = 1 - 264\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)q^n$$

$$E_{12} = 1 + \tfrac{65520}{691}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n \qquad E_{14} = 1 - 24\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{13}(n)q^n$$

(Serre p 151)
Comme $E_8 = E_4^2$ et $E_{10} = E_6E_4$, on obtient

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\textstyle\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$$

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\textstyle\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_5(n-m)$$

4.5 L'invariant modulaire

Résultat 34 *Soit* $j = 1728\dfrac{g_4^3}{\Delta}$.

1. *C'est une fonction faiblement modulaire de poids* 0*, appelée invariant modulaire.*
2. *Son ordre à l'infini est* -1*, elle est holomorphe sur* $\mathbb{H}$.
3. *La fonction* j *définit une bijection de* $\mathbb{F}^d$ *sur* $\mathbb{C}$*. Plus exactement, en dehors de* 0 *et* 1728*, toutes les valeurs complexes sont prises exactement une fois, à l'ordre* 1*, sur* $\mathbb{F}^d \setminus \{i, \rho\}$*. En* ρ*,* j *a un zéro d'ordre* 3*, en* i*,* $j - 1728$ *a un zéro d'ordre* 2.
4. *Les coefficients de Fourier du développement de* j *à l'infini sont entiers et positifs.*

Les deux premiers points : pas difficile. Le troisième : avec la formule de poids, généralisée :

$$\sum_{p \in \mathbb{F}^g} \frac{1}{\mathrm{ord}(p)} \mathrm{ord}_p(f) = 0,$$

où l'ordre de f en un point p est $n > 0$ si f a un zéro d'ordre n en ce point, $-n < 0$ si f a un pôle d'ordre n, 0 si f n'a ni pôle, ni zéro en p, $\mathrm{ord}(p)$ vaut 2 pour $p = i$, 3 pour $p = \rho$, 1 pour les autres points y compris l'infini. Regarder $j - z_0$ pour une valeur z_0 de $\mathbb{C}$. Le quatrième point se démontre avec des considérations sur les fonctions elliptiques, donc on l' "admet", (si tant est qu'on ait démontré quoi que ce soit dans ces exposés !).
Autre résultat : on appelle j_m les coefficients de Fourier de j en l'infini (pour $m \geq -1$). Alors

$$j_m \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{m}}}{\sqrt{2}m^{3/4}}.$$

(Articles de Rademacher et Petersson).
Sur le bord de $\mathbb{F}$ et sur l'axe imaginaire, j est réelle. Pas ailleurs. Exactement :

1. la demi droite de ∞ à ρ est envoyée sur $]-\infty, 0]$.
2. L'arc de cercle de ρ à i est envoyé sur $[0, 1728]$.
3. La demi droite de i à l'infini est envoyée sur $[1728, \infty]$

Conséquence de la bijection entre $\mathbb{F}^d$ et $\mathbb{C}$: **le petit théorème de Picard.**

Résultat 35 *Si* f *est une fonction holomorphe non constante, elle prend toutes les valeurs de* $\mathbb{C}$ *sauf, au plus, une.*

4.6 Formes modulaires associées à des sous-groupes de congruences

On note $\Gamma = SL(2, \mathbb{R})$. Pas $PSL(2, \mathbb{R})$, à cause du facteur $(cz + d)$ qui intervient partout.
Rappels

$$\Gamma(n) = \{M \in \Gamma : M \equiv Id \mod n\}.$$

Un sous-groupe de congruence Λ est un sous-groupe de Γ vérifiant : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\Gamma(n) \subset \Lambda \subset \Gamma,$$

le plus petit n convenant étant appelé *degré* de Λ. Alors $\Gamma(n)$ est distingué dans Λ.

Définition 36 *Soit* Λ *un sous-groupe de congruence de degré* n*. Un caractère abélien sur* Λ *est un morphisme de groupes* χ *de* Λ *dans* $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$*. Un caractère abélien modulo* n *est, en outre, égal à* 1 *sur* $\Gamma(n)$*. Le caractère trivial est noté* $\mathbf{1}$.

Résultat 37 *Un caractère abélien modulo n est d'ordre fini : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\chi^p = \mathbf{1}$.*

Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et toute matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$, on pose

$$f_k|\, M(z) = (cz+d)^{-k} f(M \cdot z).$$

Par exemple, une fonction est faiblement modulaire d'ordre k ssi $f_k|\, M = f$ pour toute matrice M de Γ.

Définition 38 *Soient $k \in \mathbb{Z}, \Lambda$ un sous groupe de congruence de degré n et χ un caractère abélien sur Λ. Une fonction $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme modulaire de poids k relativement au groupe λ et au caractère χ quand elle satisfait aux trois conditions suivantes :*

- *f est holomorphe sur $\mathbb{H}$.*
- *$f_k|\, L = \chi(L) f$ pour tout $L \in \Lambda$*
- *$f_k|\, M$ est holomorphe près de l'infini pour toute matrice M de Γ.*

On note $M_k(\Lambda, \chi)$ cet ensemble, qui est un espace vectoriel. Si χ est le caractère trivial, on note simplement $M_k(\Lambda)$.

Pour la troisième condition, on vérifie que $f_k|\, M$ est holomorphe en l'infini pour un système de représentants des classes à droite de $\Gamma/_d\Lambda$. En effet, on a le lemme

Lemme 39 *Si $f \in M_k(\Lambda, \chi)$, $L \in \Lambda$ et $M \in \Gamma$,*

$$f_k|\, LM = \chi(L)\ f_k|\, M.$$

De même que les formes modulaires (pour Γ) d'ordre impair sont toutes nulles, on a le critère d'inexistence :

Résultat 40 *Soient $k \in \mathbb{Z}, \Lambda$ un sous groupe de congruence de degré n et χ un caractère abélien sur Λ. Si $\chi(-Id) \neq (-1)^k$, alors $M_k(\Lambda, \chi) = \{0\}$.*

On a aussi

$$M_k(\Lambda, \chi) M_l(\Lambda, \chi') = M_{k+l}(\Lambda, \chi\chi').$$

On peut passer d'un groupe de congruences à un autre qui lui est conjugué :

Résultat 41 *Soient $k \in \mathbb{Z}, \Lambda$ un sous groupe de congruence de degré n, χ un caractère abélien sur Λ et $M \in \Gamma$. Le groupe $M^{-1}\Lambda M$ est encore un sous-groupe de congruence. On pose*

$$\forall K \in M^{-1}\Lambda M, \qquad \chi_M(K) = \chi(MKM^{-1}).$$

Alors χ_M est un caractère abélien sur $M^{-1}\Lambda M$ et l'application

$$\begin{aligned} M_k(\Lambda, \chi) &\to M_k(M^{-1}\Lambda M, \chi_M) \\ f &\mapsto f_k|\, M \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Le groupe $M^{-1}\Lambda M$ contient $M^{-1}\Gamma(n)M = \Gamma(n)$, donc il reste un sous groupe de congruences. Le reste demande juste du soin.

Définition 42 *Soient $k \in \mathbb{Z}, \Lambda$ un sous groupe de congruence de degré n et χ un caractère abélien modulo n sur Λ. Soit $f \in M_k(\Lambda, \chi)$, soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$. Alors $f_k|\, M$ a un développement en série de Fourier à l'infini de la forme*

$$f_k|\, M(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f(M \cdot \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m, M) e^{2i\pi m\tau/n},$$

convergeant absolument et uniformément sur $\mathbb{H}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Les coefficients de Fourier sont bien définis et vérifient

$$\alpha_f(m, LM) = \chi(L)\alpha_f(m, M).$$

Enfin on peut fabriquer des formes modulaires holomorphes pour Γ à partir de celles relatives à un sous-groupe de congruences Λ :

Résultat 43 *Soient $k \in \mathbb{Z}, \Lambda$ un sous groupe de congruence de degré n et $M_1, \ldots, M_\nu \in \Gamma$ des représentants des classes à droite de $\Gamma/_d\Lambda$. Pour toute $f \in M_k(\Lambda)$ $(\chi = \mathbf{1})$, on pose*

$$\mathrm{Sp}(f) = \sum_{j=1}^{\nu} f_k|\, M_j \qquad \text{et} \qquad \Pi(f) = \prod_{j=1}^{\nu} f_k|\, M_j.$$

Alors

$$\mathrm{Sp}(f) \in M_k \qquad \text{et} \qquad \Pi(f) \in M_{k\nu}.$$

4.7 Espace de Hilbert. Produit scalaire de Petersson

La mesure invariante sur $\mathbb{H}$ est

$$d\nu = \frac{dxdy}{y^2}.$$

Le domaine fondamental $\mathbb{F}$ est de volume fini :

$$\nu(\mathbb{F}) = \int_{\mathbb{F}} d\nu = \frac{\pi}{3}.$$

(calcul).

On pose

$$\varphi_{f,g}(z) = f(z)\overline{g(z)}(\mathrm{Im}(z))^k.$$

On a, pour toutes f, g et $M \in \Gamma$:

$$\varphi_{f|M,g|M}(z) = \varphi_{f,g}(M \cdot z).$$

Résultat 44 *Si f et g sont des formes modulaires holomorphes de poids $k > 0$,*

1. $\forall M \in SL(2, \mathbb{R}),\ \forall z \in \mathbb{H},\ f(z)\overline{g(z)}(\mathrm{Im}(z))^k = f(M \cdot z)\overline{g(M \cdot z)}(\mathrm{Im}(M \cdot z))^k.$
2. *La fonction $z \mapsto f(z)\overline{g(z)}(\mathrm{Im}(z))^k$ est bornée sur $\mathbb{H}$ si et seulement si f ou g est parabolique (nulle à l'infini).*

On peut alors définir

Résultat 45 *Soient f et g deux formes modulaires holomorphes de poids $k > 0$, dont l'une est parabolique. Alors l'intégrale*

$$< f, g >= \int_{\mathbb{F}} f(z)\overline{g(z)}(\mathrm{Im}(z))^k \ d\nu$$

est absolument convergente et l'on a :

1. $< f, g >= \overline{< g, f >}$,
2. $f \mapsto < f, g >$ *est linéaire (corps de base $\mathbb{C}$),*
3. *Si $f \in S_k$, $< f, f > \geq 0$ et $< f, f >= 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.*

On appelle $< f, g >$ le produit scalaire de Petersson de f et g.

On a vu que $M_k = \mathbb{C}G_k \oplus S_k$. Cette somme est **orthogonale pour le produit scalaire de Petersson.**

(Admis)

5 Références

1. Gehring, F.W., Gilman, J.P., Martin, G.J., Kleinian groups with real parameters, Comm. in contemporary mat., Vol. 3, N 2 (2001) 163-186.
2. Koecher, M., Krieg, A., Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, 1998
3. Ladegaillerie, Yves. Géométrie pour le Capes de mathématiques, Ellipses, 2002
4. Maclachlan, C., Martin, G.J., 2-generator arithmetic Kleinian groups, J. reine angew. Math. 511 (1999),95-117
5. Maskit, Bernard, Kleinian Groups, Springer-Verlag, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 287,1980
6. Miyake, Toshitsune, Modular forms, Springer-Verlag, 1989
7. Serre, Jean-Pierre, Cours d'arithmétique, PUF, 1970