$(\mathfrak{g}, K)$ - modules irréductibles.

Exposé du GDT „Formes Modulaires"

12 mai 2005.

En suivant les méthodes algébriques développées par Harish-Chandra nous allons étudier les représentations unitaires et irréductibles du groupe de Lie réductif $GL(2, \mathbb{R})$. Mais commençons par l'idée générale.

Soit $\pi : G \times V \to V$ une représentation continue d'un groupe de Lie s/simple de centre fini G dans un espace de Banach V. (on adaptera les techniques au cas réductif).

On dit que $v \in V$ est un vecteur C^∞ si $x \to \pi(x)v$ est une fonction C^∞ de G dans V. Le sous-espace $C^\infty(V)$ de tels vecteurs est dense dans V. Si $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}(G)$, alors $\mathfrak{g}_0$ y opère par $\pi(X)v = \frac{d}{dt}\pi(\exp tX)v\big|_{t=0}$ $\forall X \in \mathfrak{g}_0$, $v \in C^\infty(V)$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ est la complexifiée de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante alors la rep. π se prolonge (d'une façon unique) en un homomorphisme d'algèbres (sur $\mathbb{C}$) $\pi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(C^\infty(V))$ tq. $\pi(1) = 1$. $C^\infty(V)$ devient alors un $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-module.

Ainsi une représentation du groupe donne lieu à un $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-module de telle sorte que les sous-espaces fermés et G-invariants W fournissent la structure des $U(\mathfrak{g})$-sous-modules sur $C^\infty(W)$. Malheureusement cette correspondance n'est pas utilisable, en effet $C^\infty(V)$ est rarement irréductible, même si V l'est. (En général $\dim C^\infty(V) = 2^{\aleph_0}$).

Pour palier ce problème on peut considérer $C^\omega(V)$, le s/espace des vecteurs analytiques et même de montrer que $C^\omega(V)$ est dense dans V.

Malgré tout ce $U(\mathfrak{g})$-module reste trop „grand". On dira que $v \in V$ est K-fini si $\dim(\mathrm{Span}\,\pi(K)v) < \infty$ où K est le s/groupe compact maximal de G. L'espace V_K des vecteurs K-finis se décompose en somme directe de s/espaces de $\dim < \infty$ dans lesquels K opère d'une façon irréductible. On montre que V_K est dense dans V et même $C^\omega(V)_K$ est dense dans V.

Les espaces $C^\omega(V)_K$ et $C^\infty(V)_K$ sont bien sûr des $U(\mathfrak{g})$-modules ainsi que des espaces de représentation du groupe K. De plus les $U(\mathfrak{g})$ et K structures sont compatibles dans le sens que l'on précisera bientôt. On dira que $C^\infty(V)_K$ muni des ses $U(\mathfrak{g})$ et K structures est le $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent à V.

Malheureusement même la correspondance $V \leftrightarrow C^\infty(V)_K$ n'est pas univoque. On dira alors que 2 repr. V_1 et V_2 sont infinitésim^t équivalentes si $C^\infty(V_1)_K$ et $C^\infty(V_2)_K$ sont algébriquement équiv. i.e. $\exists$ un iso $\mathbb{C}$-linéaire de $(\mathfrak{g}, K)$-modules.

On dira que la rep. V, ou son $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent, est quasi-simple si $Z(\mathfrak{g})$ agit par des scalaires dans le $(\mathfrak{g}, K)$-module.

Thm. Si V est une rep. unitaire irréd. de G dans un Hilbert, alors V est quasi-simple.

Soit $\tau \in \widehat{K}$ et V_τ - la somme de tous les s/spaces K-invariants de V_K dans lesquels $\pi|_K$ est équiv. à τ. On dit que V est admissible si $\forall \tau$ $\dim V_\tau < \infty$. Puisque $C^\omega(V)_K$ est dense dans V on a que $C^\omega(V)_\tau$ est dense dans $V_\tau \Rightarrow C^\omega(V)_\tau = C^\infty(V)_\tau = V_\tau$.

Thm Si V est une repr. irréduct. quasi-simple de G dans un Banach ~~V~~, alors V est admissible.

Thm. Si V est une repr. admissible de G dans un Banach, alors les s/spaces fermés G-invariants W de V ~~sont~~ en correspondance univoque avec les s/spaces $U(\mathfrak{g})$-invariants S de $V_K = C^\infty(V)_K$ où $S = W_K$ et $W = \overline{S}$.

Si V est un Hilbert avec un produit scalaire Hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle$, alors le $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent $C^\infty(V)_K$ vérifie :

$$(*) \quad \begin{aligned} &\langle \pi(X) v_1, v_2 \rangle = - \langle v_1, \pi(X) v_2 \rangle && X \in \mathfrak{g}_0 \\ &\langle \pi(k) v_1, \pi(k) v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle. && k \in K. \end{aligned}$$

Récipro^{qt}. on dira que la forme hermit. est invariante sur le $(\mathfrak{g}, K)$-module si $(*)$ est vérifiée.

Un $(\mathfrak{g}, K)$-module est infinitésimalement unitaire s'il admet une forme hermit. déf. posit et invariante.

Thm. ⓪. Tout $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible, admissible et infinit^t unitaire est un $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent à une rep. unit. irréd. de G dans 1 Hilbert.

①. 2 rep. unit. irréduct. de G sont unitairement équivalentes $\Longleftrightarrow$ elles sont infinitésimalement équivalentes.

Revenons au cas où $G = GL(2,\mathbb{R})$ et $K = O(2)$. Notons la base de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ par

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit que $[\hat{H},\hat{R}] = 2\hat{R}$; $[\hat{H},\hat{L}] = -2\hat{L}$; $[\hat{R},\hat{L}] = \hat{H}$.

Posons $-4\Delta = \hat{H}^2 + 2\hat{R}\hat{L} + 2\hat{L}\hat{R} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

$\Rightarrow$ Thm $\Delta \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ appartient au centre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$.

Vu comme un opérateur diff. sur G Δ est l'opér. de Laplace-Beltrami.

Soit

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}; \quad L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}; \quad H = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \Rightarrow$$

$[H,R] = 2R$; $[H,L] = -2L$; $[R,L] = H$. Ces éléments sont conjugués aux $\hat{H},\hat{R},\hat{L}$ par $C = -\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Notons $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} C^{-1}$. $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit V - un $(\mathfrak{g},K)$-module. I.e. V est un esp. vectoriel dans lequel K et $\mathfrak{g}$ agissent de telle sorte que

1. V se décompose en somme alg. directe de s/espaces K-invariants de dimension finie. ($\forall v \in V$; Kv engendre un esp. de dim $<\infty$ et K y agit continûment).
2. $k \cdot X \cdot v = \mathrm{Ad}(k)X . kv$; $\forall v \in V$; $k \in K$; $X \in \mathfrak{g}$.
3. Si $Y \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ et $v \in V$, alors
$$d/dt\Big|_{t=0} (\exp tY).v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp tY)v = Y.v.$$

2'. $\pi(k)\,\pi(X)\,\pi(k^{-1})\,v = \pi(\mathrm{Ad}(k).X)\,v$

Considérons un tel $(\mathfrak{g},K)$-module admissible (toutes les composantes K-isotypiques sont de dimension finie):

$$V = \bigoplus V(\sigma) \quad ; \quad \dim V(\sigma) < \infty; \ \sigma \in \hat{K}.$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ agit dans V.

Prop. Soit V un $(\mathfrak{g},K)$-module irréd. admissible pour $GL^+(2,\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ agit par des scalaires dans V: $\forall D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ $D.x = \lambda x$ $\forall x \in V$.

D. En effet $D \circ \pi(k) = \pi(k) \circ D$, or $\dim V(\sigma) < \infty \Rightarrow D$ a des vect. propres dans chacun des $V(\sigma)$. Si $V_0 = $ span d'un tel vect. propre il serait K-invariant $\Rightarrow$ par irréductibilité $V_0 = V$ $\square$.

Ici: $K \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \Rightarrow \hat{K} \simeq \mathbb{Z}$. Les repr. sont des caractères:
$\sigma_k(k_\sigma) = e^{ik\theta}$; $k \in \mathbb{Z}$. On note $V(\sigma_k) = V(k)$

Si $\Sigma = \{ k \in \mathbb{Z} \mid V(k) \neq 0 \}$. – l'ensemble des K-types de V.

<u>Prop</u> Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréduct. admiss. de $GL_2^+(\mathbb{R})$.
Alors ①. $V(k)$ est l'espace de tous les $x \in V$ tq. $Hx = kx$.
②. Si $x \in V(k)$; alors $Rx \in V(k+2)$ et $Lx \in V(k-2)$.
③. Si $x \in V(k) \setminus \{0\}$, alors $\mathbb{C}x = V(k)$; $\mathbb{C}R^n x = V(k+2n)$ et $\mathbb{C}L^n x = V(k-2n)$ et

$$V = \mathbb{C}x \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{C}R^n x \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{C}L^n x.$$

④. Tout $V(k)$ est au plus de dim 1. Si $V(k)$ et $V(l)$ sont non-nuls, alors $(k-l)$ est un entier pair.

⑤. Si λ est une val. propre de Δ sur V et $x \in V(k)$, alors
$LRx = \left(-\lambda - \frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\right)x$ et $RLx = \left(-\lambda + \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right)x$.

⑥. Si en plus $Rx = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{2}\left(1 + \frac{k}{2}\right)$. Si $Lx = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{k}{2}\left(1 - k/2\right)$.

⑦. Soit $\lambda = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)$ et $x \in V(l)$. Si $Rx = 0$, alors soit $l = -k$, soit $l = k-2$. Si $Lx = 0 \Rightarrow l = k$ ou bien $l = 2-k$.

Le point ④ implique que si V est un $(\mathfrak{g}, K)$-module irréduct. et admissible, alors l'ensemble de ses K-types est constitué soit des entiers pairs soit impairs. On dira donc que le $(\mathfrak{g}, K)$-module est pair ou impair suivant la parité de ces K-types.

<u>Thm</u>. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)$; $k \in 2\mathbb{Z}$ (resp $k \in 2\mathbb{Z}+1$).
Il existe alors au plus un (à un iso près) $(\mathfrak{g}, K)$-module pair V (resp. impair) dans lequel Δ et Z ont les valeurs propres λ et μ respectivt.
Pour un tel V l'ensemble de ses K-types est $2\mathbb{Z}$ (resp $2\mathbb{Z}+1$).

Si l'on admet l'existance de V ses propriétés et son unicité découlent de la <u>Prop</u>. précédente et de la définition d'un $(\mathfrak{g}, K)$-module

Si $\lambda = \frac{k}{2}\left(1 - k/2\right)$; avec $k \in \mathbb{Z}$ la question de classification reste ouverte. Notons que si l'on remplace k par $2-k$ λ ne change pas et peut donc supposer que $k \geq 1$.

On a :

<u>Thm</u> Soit $k \geq 1$ un entier et $\lambda = \frac{k}{2}(1 - k/2)$. Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module de parité de k et Σ l'ensemble de ses K-types.
Alors Σ est l'un de trois ensembles suivants:

$$\Sigma^+(k) = \{ l \in \mathbb{Z} \mid l \equiv k \pmod 2 ;\ l \geq k \}$$
$$\Sigma^-(k) = \{ l \in \mathbb{Z} \mid l \equiv k \pmod 2 ;\ l \leq -k \}$$
$$\Sigma^0(k) = \{ l \in \mathbb{Z} \mid l \equiv k \pmod 2 ,\ -k < l < k \}.$$

Il existe au plus un (à un iso près) $(\mathfrak{g}, K)$-module correspondant à chacun des Σ.

On va montrer l'existence des $(\mathfrak{g}, K)$-modules évoqués dans les 2 thms, en les réalisant dans les vecteurs K-finis de certaines representations irred. et admissible (π, H) de $GL(2,\mathbb{R})^+$.

Soit $\lambda = s(1-s)$ où $s = \frac{1}{2}(s_1 - s_2 + 1)$ et $\mu = s_1 + s_2$. s_1, s_2 seront les paramètres de π (avec $\varepsilon = 0, 1$) et λ et μ seront les val. propres de Δ et Z de cette représentation.

L'ensemble des K-types sera l'ensemble des entiers congrus à ε mod 2. On distinguera les cas où $\lambda \neq \frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})$ et $\lambda = \frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})$.

Soit $H^\infty(s_1, s_2, \epsilon) = \{ f \in C^\infty(G)$ tq.

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} g \right) = y_1^{s_1 + 1/2} y_2^{s_2 - 1/2} f(g) \ ; \quad y_1, y_2 > 0$$

et
$$f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g \right) = (-1)^\varepsilon f(g) \ \}.$$

G y opère à droite: $\quad (\pi(g) f)(x) = f(xg). \qquad (\star)$

En effet les 2 propriétés précédentes restes invariantes sous cette action.

Rappelons la décomposition d'Iwasawa:

$$(*) \qquad g = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} k_\theta \ ; \qquad x, y, \theta, u \in \mathbb{R} ;\ y > 0.$$

Ainsi f est déterminée par ces valeurs sur K $\quad (f \in H^\infty(s_1, s_2, \epsilon))$.
et $f|_K$ est une fonction C^∞ tq. $f(k_{\theta+\pi}) = (-1)^\varepsilon f(k_\theta)$.

Etant donné une telle fonction on peut l'étendre à G en posant

$$f(g) = u^{s_1 + s_2} y^s f(k_\theta) \quad \text{pour } g = (*).$$

On définit sur $H(s_1, s_2, \epsilon)$ un produit scalaire:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(k_\theta) \overline{f_2(k_\theta)} \, d\theta.$$

Notons $H(s_1, s_2, \epsilon)$ la complétion hilbertienne de cet espace. On peut donc l'identifié avec $L^2[-\pi/2, \pi/2]$ via $\theta \to k_\theta$.

Soit (ρ, H) une repr. de $K = SO_2$ dans un Hilbert. On dira que $f \in H$ est un vecteur C^1 si $f' = \lim \frac{1}{t}(\rho(K_t)f - f)$ existe et appartient à H et $t \to \rho(K_t)f'$ est continue de $\mathbb{R}$ dans H. On définit ainsi des vecteurs C^∞.

<u>Lem</u>. Soit ρ la represent. régulière de K dans $L^2(K) = L^2[0, 2\pi]$, alors les vecteurs C^∞ de ρ sont exactement les éléments de $C^\infty(K)$.

Δ Soit $f \in L^2[0, 2\pi]$ s'écrit $f(x) = \sum a_n e^{2\pi i n x}$ où la série de Fourier converge dans $L^2[0, 2\pi]$. Soit $f_t = \rho(k_t).f$, alors $f_t(x) = f(x+t)$.
Supposons que f est un vecteur C^1. $\exists$ alors $g \in L^2[0, 2\pi]$ t.q $\lim 1/t\,(f_t - f) = g$. Si $g = \sum b_n e^{2\pi i n x}$, alors

$$\lim_{t \to 0} \sum_{n} \left| \left(\frac{1}{t} e^{2\pi i n t} - 1\right) a_n - b_n \right|^2 = 0;$$ en effet $\frac{1}{t}(f_t - f) = $
$$= \sum_n \frac{1}{t}(e^{2\pi i n t} - 1) a_n e^{2\pi i n x}$$

et la convergence est considérée ici par rapport à la norme L^2.
On a $0 = \lim_{t \to 0} \sum_{n=-N}^{N} \left| \frac{1}{t}(e^{2\pi i n t} - 1) a_n - b_n \right|^2 = \sum_{-N}^{N} \lim_{t \to 0} (\text{—}''\text{—}) =$

$$= \sum_{-N}^{N} |2\pi i n a_n - b_n|^2 \Rightarrow \quad b_n = 2\pi i n a_n \quad \forall n. \quad \text{Or } \sum |b_n|^2 < \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum n^2 |a_n|^2 < \infty$. Par récurrence on obtient $\sum |p(n) a_n|^2 < \infty$ $\forall p(n)$ - polynôme. $\Rightarrow \forall N > 0;\ \exists C_N$ tq. $|a_n| < C_N n^N$
$\Rightarrow \sum a_n e^{2\pi i n x}$ converge uniformément, on peut donc dériver sous le signe de la somme. $\Rightarrow f \in C^\infty(K)$.
Récipr.^t on obtient des conditions sur a_n qui garantissent le fait que f soit un vecteur C^∞ de ρ. $\square$.

<u>Prop</u> La repr. $(\star)$ se prolonge dans $H(s_1, s_2, \epsilon)$. L'espace $H^\infty(s_1, s_2, \epsilon)$ est celui des vecteurs C^∞ de cette représentation.

Δ. Il faut donc montrer d'abord que $\pi(g)$ est un opérateur borné sur $H^\infty(s_1, s_2, \epsilon)$ on pourra alors le prolonger par continuité à l'adhérence $H(s_1, s_2, \epsilon)$.

Pour cela on utilise la décomp. de Cartan $G = K \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} K$; $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ et on montre que $\pi(a(y_1, y_2))$ est un opérat. borné.
$a(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$.

On peut donc prolonger cette action à $H(s_1, s_2, \epsilon)$ et l'on vérifie que cette action est continue (donc c'est une représent) et que l'ensemble de ces vecteurs C^∞ coïncide avec $H^\infty(s_1, s_2, \epsilon)$. $\square$.

Considérons maintenant le $(\mathfrak{g}, K)$-module des vecteurs K-finis dans ~~...~~ $H(s_1, s_2, \epsilon)$. Si $\ell \equiv \varepsilon \mod 2$ il existe alors un unique élément $f_\ell \in H$ tq. $\quad f_\ell(k_\theta) = e^{i\ell\theta}$

la condition $\ell \equiv \varepsilon \mod 2$ est nécessaire pour $f(k_{\theta+\pi}) = (-1)^\epsilon f(k_\theta)$

$$f_\ell\left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix} k_\theta\right) = u^{s_1+s_2}\, y^s\, e^{i\ell\theta}$$

<u>Prop</u> Soit $f_\ell \in H$. $\Rightarrow Hf_\ell = \ell f_\ell$, $Rf_\ell = (s + \frac{\ell}{2}) f_{\ell+2}$, $Lf_\ell = (s - \ell/2) f_{\ell-2}$ et $\Delta f_\ell = \lambda f_\ell$, $Zf_\ell = \mu f_\ell$ où
$\lambda = s(1-s)$; $\mu = s_1 + s_2$, $s = \frac{1}{2}(s_1 - s_2 + 1)$.

<u>Thm.</u> Soit H le $(\mathfrak{g}, K)$-module de vecteurs K-finis dans le Hilbert $H(s_1, s_2, \epsilon)$. Soit $s = \frac{1}{2}(s_1 - s_2 + 1)$; $\lambda = s(1-s)$ et $\mu = (s_1 + s_2)$

Alors Δ et Z agissent par des scalaires dans H avec les v.p λ et μ. L'ensemble des K-types de H est constitué de tous les entiers congrus à ε modulo 2.

1. Si $s \neq \frac{k}{2}$, où $k \equiv \varepsilon \mod 2 \Rightarrow H$ est irréductible.

2. Si $s \geq 1/2$ et $s = \frac{k}{2}$, avec $k \geq 1$ $k \equiv \varepsilon \mod \varepsilon \Rightarrow H$ a deux sous espaces invariants H_+ et H_-. Les K-types de $H_\pm$ sont de la forme $\Sigma^\pm(k)$.

   Le quotient $H/(H_1 \oplus H_2)$ est irréductible sauf si $k = 1$ auquel cas il est nul, son ensemble des K-types $= \Sigma^0(k)$

3. Si $s \leq 1/2 \Rightarrow s = 1 - \frac{k}{2}$, $k \geq 1$; $k \equiv \varepsilon \mod 2 \Rightarrow$

   H possède un s-espace invariant H^0 dont les K-types sont de la forme $\Sigma^0(k)$. H_0 est irréductible sauf si $k = 1$ auquel cas il est nul, $H/H_0 = H_+ \oplus H_-$ irréduct. invariants dont les K-types sont $\Sigma^\pm(k)$.

① Vient du premier thm sur l'existence de (g, K) module irreduct.

②. $H_+ = \oplus R^n f_k$ et $H_- = L^n f_{-k}$. ③ Idem. □.

<u>Thm</u> Classification des (g, K)-modules pour $GL(2,\mathbb{R})^+$.

Tout $(gl(2,\mathbb{R}), SO(2))$-module irreduct. admissible peut être réalisé comme l'espace des vecteurs K-finis d'une repr. admissible de $GL(2,\mathbb{R})^+$ dans un Hilbert.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon = 0, 1$.

①. Si $\lambda \neq \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})$, $k \equiv \varepsilon \mod 2$. $\Rightarrow \exists !$ (g, K)-module de parité ε sur lequel Δ et Z agissent par λ et μ. ~~Ses~~ K-types sont de la forme $\{k ; k \in \mathbb{Z} ; k \equiv \varepsilon \mod 2\}$.

②. Si $\lambda = \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})$; $k \geq 1$; $k \geq 1$, $k \equiv \varepsilon \mod 2 \Rightarrow$

$\exists$ <u>3</u> irreducibles admissibles (g, K)-modules de parité ε sur lesquels Δ et Z agissent par λ et μ, sauf si $k = 1$ auquel cas $\exists 2$. les K-types sont $\Sigma^{\pm}(k)$ et $\Sigma^{0}(k)$. si <u>$k > 1$</u>.