# OPÉRATEURS DE HECKE

GROUPE DE TRAVAIL "FORMES MODULAIRES"

En 1937 Hecke a introduit un anneau d'opérateurs agissant sur les formes modulaires. La commutativité de cet anneau permet de trouver des expressions en forme de produit euleurien pour des fonctions $L$.

Rappelons tout d'abord les notations:

$$(f_{|\gamma})(z) = (\det \gamma)^{k/2}(cz+d)-kf\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

**Lemme 0.1.** *Soit $\Gamma$ un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ et $\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})^+$. Il existe alors $M \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha^{-1}\Gamma\alpha \supseteq \Gamma(M)$, i.e. $\alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma(1)$ est un sous-groupe de congruence.*

**Proposition 0.2.** *Soit $\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})^+$, alors l'ensemble $\Gamma\alpha\Gamma$ est une réunion finie des classes d'équivalence*

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma(1)\alpha_i, \quad \alpha_i \in GL(2,\mathbb{Q})^+.$$

En effet, le nombre $N = [\Gamma(1) : \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap \Gamma(1)] < \infty$.

Définissons l'opérateur de Hecke $T_\alpha = T(\alpha)$ sur $M_k(\Gamma(1))$ par

$$f_{|T_\alpha} = \sum_i f_{|\alpha_i}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix des $\alpha_i$ car $f$ est modulaire. De plus $f_{|T_\alpha}$ est modulaire. En effet, si $\gamma \in \Gamma(1)$, alors $\Gamma(1)\alpha_i\gamma$ est une permutation des $\Gamma(1)\alpha_i$, donc il existe $\gamma_i \in \Gamma(1)$ tels que $\alpha_i\gamma = \gamma_i\alpha_i$. Ainsi

$$(f_{|T_\alpha})_{|\gamma} = \sum_i f_{|\alpha_i\gamma} = \sum_i f_{|\gamma_i\alpha_i} = \sum_i f_{|\alpha_i} = f_{|T_\alpha}.$$

L'ensemble des formes paraboliques $S_k(\Gamma(1))$ est bien sûr un sous-espace invariant.

Soit $\alpha, \beta \in GL(2,\mathbb{Q})^+$ avec les $\alpha_i$ comme précédemment et $\beta_j$ tels que $\Gamma(1)\beta\Gamma(1) = \Gamma(1)\beta_j$ (réunion disjointe). Ainsi

$$(f_{|T_\alpha})_{|T_\beta} = \sum_{i,j} f_{\alpha_i\beta_j} = \sum_{\sigma\in\Gamma(1)\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+} m(\alpha,\beta;\sigma) f_{|\sigma}, \tag{1}$$

où $\sigma$ parcourt $\Gamma(1) \setminus GL(2,\mathbb{Q})^+$ et $m(\alpha,\beta;\sigma)$ est le nombre d'indice $(i,j)$ tels que $\sigma \in \Gamma(1)\alpha_i\beta_j$. Ce nombre ne dépend que de la classe $\Gamma(1)\sigma\Gamma$ donc

$$(f_{|T_\alpha})_{|T_\beta} = \sum_{\sigma\in\Gamma(1)\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma(1)} m(\alpha,\beta;\sigma)T_\sigma.$$

Ainsi le groupe abélien libre $\mathcal{R}$ engendré par les $T_\alpha$, $\alpha \in \Gamma(1)\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma(1)$ est muni de la multiplication définie par:

$$T_{|\alpha} \cdot T_{|\beta} = \sum_{\sigma\in\Gamma(1)\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma(1)} m(\alpha,\beta;\sigma)T_\sigma.$$

Pour voir que cette loi est associative il suffit de voir que

$$(T_\alpha \cdot T_\beta) \cdot T_\gamma = \sum_{\sigma\in\Gamma(1)\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma(1)} m(\alpha,\beta,\gamma;\sigma)T_\sigma = T_\alpha \cdot (T_\beta \cdot T_\gamma),$$

où $m(\alpha,\beta,\gamma;\sigma)$ est le nombre de triplets $(i,j,k)$ tel que $\sigma \in \Gamma(1)\alpha_i\beta_j\gamma_k$.

Cet anneau qui est une algèbre est appelé *algèbre de Hecke*. Elle agit à droite sur $M_k(\Gamma(1))$ et $S_k(\Gamma(1))$. Etudions donc la structure de cette algèbre.

**Proposition 0.3.** *Le double quotient*

$$\Gamma(1) \setminus GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma(1)$$

*est isomorphe à un sous-ensemble des matrices diagonales donné par*

$$\{diag(d_1,d_2); d_1,d_2 \in \mathbb{Q},\ d_1/d_2 \in \mathbb{N}^+\}.$$

La démonstration de ce fait est basée sur le théorème des diviseurs élémentaires.

**Proposition 0.4.** *Pour tout $\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})^+$ on a*

$$\Gamma(1)\alpha\Gamma(1) = \Gamma(1)\alpha^T\Gamma(1).$$

En effet, d'après la proposition 3 pour chaque classe du double quotient on peut choisir un représentant diagonal donc symétrique.

**Lemme 0.5.** *Pour tout $\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})^+$ on peut choisir les représentants $\alpha_i$ du quotient à gauche de telle sorte que*

$$\Gamma(1)\alpha\Gamma(1) = \bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i\Gamma(1).$$

En effet, d'après la proposition 3 le double quotient $\Gamma(1)\alpha\Gamma(1)$ contient un représentant diagonal, donc $\Gamma(1)\alpha^T\Gamma(1) = \bigcup_{i=1}^N \alpha_i^T\Gamma(1)$. Puisque $\alpha$ et $\alpha^T$ engendrent la même classe on a $\Gamma(1)\alpha_i \cap \alpha_i^T\Gamma(1) \neq \emptyset$. En choisissant des $\beta_i$ dans cette intersection on obtient le résultat.

**Théorème 0.6.** *L'algèbre de Hecke $\mathcal{R}$ est commutative.*

La démonstration de ce résultat est basée sur l'idée suivante. La transposition $g \to g^T$ induit un anti-automorphisme de $\mathcal{R}$. Or, d'après le lemme 4 c'est l'identité. Mais pour que l'application identité soit un anti-automorphisme il faut que l'algèbre soit commutative.

Rappelons que le produit scalaire de Peterson est défini sur $S_k(\Gamma(1))$ par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma(1)\backslash\mathbb{H}_+} f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy.$$

On montre alors le thórème suivant.

**Théorème 0.7.** *Les opérateurs $T_\alpha$ sont auto-adjoints sur $S_k(\Gamma(1))$ par rapport au produit scalaire de Peterson.*

Ainsi l'algèbre de Hecke $\mathcal{R}$ est une algèbre commutative composée d'éléments auto-adjoints agissant sur un espace vectoriel $S_k(\Gamma(1))$ qui est de dimension finie. Il existe donc une base de $S_k(\Gamma(1))$ formée de vecteurs propres de tous les opérateurs de Hecke $T_\alpha$.

Si $f$ est une telle forme (vecteur) propre, notons $f(z) = \sum A(n)q^n$ son développement en série de Fourier.

Nous allons à présent étudier la fonction $L$ associée à $f$: $L(s, f) = \sum A(n)n^{-s}$. Notre but est de trouver son expression en forme de produit eulerien.

Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $T(n) = \sum T_{\alpha(d_1,d_2)}$, où $d_1d_2 = n$, $d_2|d_1$ et $\alpha(d_1, d_2) = diag(d_1, d_2)$.

Ainsi, d'après la proposition 1, l'ensemble $\Delta_n$ des matrices $2 \times 2$ à coefficients entiers de déterminant égal à $n$ s'écrit

$$\Delta_n = \cup_j \Gamma(1)\delta_{n,j}.$$

Ainsi $T(n)f = \sum_j f_{|\delta_{n,j}}$.

**Proposition 0.8.** *On a la décomposition suivante:*

$$\Delta_n = \bigcup_{a,d>0,\, ad=n, b \bmod d} \Gamma(1) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Soit$f$ une forme parabolique : $f \in S_k(\Gamma(1))$, et $f = \sum A(m)q^m$ son développement en série de Fourier. Considérons également le développement en série de Fourier de $T(n)f$, $T(n)f = \sum B(m)q^m$. Nous allons à présent établir le lien entre les coefficients $A(m)$ et $B(m)$. Afin de faciliter l'exposé on prolongèra ces coefficients aux rationnels en posant $A(m) = B(m) = 0$ si $m \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. On écrira alors $e(x) = e^{2\pi ix}$.

On a

$$(T(n)f)(z) = \sum_{ad=n} \sum b \bmod d \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

$$(2) \qquad = \sum_{ad=n} \sum b \bmod d \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} \sum_{m>0} A(m) e\left(\frac{amz}{d}\right) e\left(\frac{mb}{d}\right).$$

Or $\sum_b e\left(\frac{mb}{d}\right) = d$ si $d|m$ et cette somme est nulle sinon. Ainsi (2) est égal à

$$\sum_{m>0} \sum_{ad=n, d|m} \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} de\left(\frac{amz}{d}\right) A(m).$$

En faisant un changement de variable on voit que

$$B(m) = \sum_{ad=n, a|m} \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} dA\left(\frac{md}{a}\right).$$

Considérons une forme de Hecke (i.e. vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke). Normalisons les valeurs propres de tous ces opérateurs de telle sorte que

$$T(n)f = n^{1-k/2}\lambda(n)f.$$

**Proposition 0.9.** *Avec les mêmes notations les coefficients de Fourier $A(n)$ de la forme $f$ vérifient*

(1) $A(1) \neq 0$.
(2) *Si $A(1) = 1$, alors $\lambda(n) = A(n)$ pour tout $n$.*
(3) *Si $A(1) = 1$, alors les coefficients $A(n)$ sont multiplicatifs, i.e. $A(nm) = A(n)A(m)$ à condition que $(m, n) = 1$.*

*Démonstration.* D'après l'expression des coefficients $B(m)$ on a

$$n^{1-k/2}\lambda(n)A(m) = \sum_{ad=n, a|m} \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} dA\left(\frac{md}{a}\right).$$

Si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, alors le seul $a$ divisant $m$ et $n$ ne peut qu'être égal à 1. Ainsi $\lambda(n)A(m) = A(nm)$. En posant $m = 1$ on a $A(n) = \lambda(n)A(1)$. Les deux dernières assertions de la proposition s'en déduisent aisément.

**Théorème 0.10.** *Soit $f$ une forme de Hecke normalisée (i.e. $A(1) = 1$). Alors*

$$L(s, f) = \sum m > 0 A(n) n^{-s} = \prod p(1 - A(p)p^{-s} + pk - 1 - 2s)^{-1}.$$

*Démonstration.* D'après la décomposition en facteurs premiers
$$L(s,f) = \prod_p \left( \sum_{r=0}^{\infty} A(p^r) p^{-rs} \right).$$
Pour $k \geq 1$ l'expression pour le coefficient $B(m)$ et le fait que $\lambda(p) = A(p)$ on obtient
$$A(p^{r+1}) - A(p)A(p)A(p^r) + p^{k-1}A(p^{r-1}) = 0.$$
Ce qui veut dire que
$$(1 - A(p)X + p^{k-1}X^2) \left( \sum_r A(p^r) X^r \right) = 1.$$
En posant $X = p^{-s}$ on obtient le résultat. □

En particulier, $S_{12}(\Gamma(1))$ est de dimension 1 donc la fonction $\Delta$ de Ramanujan est une forme de Hecke. Puisque $\tau(1) = 1$ cette forme est normaliée et on a aisni la formule de Mordel pour le produit eulerien correspondant.