Formes de Maass

Notations et rappels

On désigne par $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré et on note Γ le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Le laplacien non euclidien est l'opérateur $\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$. Pour toute fonction f de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$, suffisamment régulière :

$$< \Delta(f), f >_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})} = \int\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)dxdy,$$

donc Δ est un opérateur positif de $L^2(\Gamma\setminus\mathbb{H})$.

De plus, Δ est invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$: pour toute f suffisamment régulière et toute $g \in SL_2(\mathbb{R})$,

$$\Delta(f\circ g) = \Delta(f)\circ g.$$

1 Définition et exemples

Définition 1 *Une forme de Maass est une application $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, lisse, telle que :*

1. *$\forall \gamma \in \Gamma$, $f(\gamma(z)) = f(z)$.*
2. *f est une fonction propre de Δ : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Delta(f) = \lambda f$.*
3. *$f(x+iy) = \mathcal{O}(y^N)$ pour N assez grand, quand y tend vers $+\infty$.*

Proposition 2 *([1], p. 65 et 104). Si $Re(s) > 1$, posons :*

$$E(z,s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2-\{(0,0)\}}\frac{y^s}{|mz+n|^{2s}}.$$

(Série d'Eisenstein). Cette fonction vérifie $E(z,s) = E(z,1-s)$, ce qui permet de la prolonger méromorphiquement pour $s \in \mathbb{C}$. Ses pôles sont $s = 0$ et $s = 1$. Si $s \neq 0,1$, $E(z,s)$ est une forme de Maass de valeur propre $s(1-s)$.

Preuve.

Premier cas. $Re(s) > 1$. De manière immédiate, les points 1 et 3 sont clairs. Remarquons que $\Delta(y^s) = s(1-s)y^s$. Par suite, comme Δ est invariant sous l'action de $SL_2(\mathbb{R})$, pour tout $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$, $Im(\gamma(z))^s = \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$ est une fonction propre de Δ de valeur propre $s(1-s)$. Par suite, $E(z,s)$ vérifie 2.

Cas général. Les points 1 et 3 restent clairs. Pour le deuxième point, on a besoin du développement en série de Fourier de $E(s,z)$. Pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $E(\gamma(z),s) = E(z+1,s) = E(z,s)$, donc on peut développer $E(z,s)$ sous la forme :

$$E(z,s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y,s)e^{2i\pi nx}.$$

On montre qu'on a les résultats suivants ([1], p. 68) :

$$\begin{aligned}
a_0(y,s) &= \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)y^s + \pi^{s-1}\Gamma(1-s)\zeta(2-2s)y^{1-s}, \\
a_n(y,s) &= 2|n|^{s-1}\sigma_{1-2s}(|n|)\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|n|y),
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_{1-2s}(l) &= \sum_{k|l} l^{1-2s}, \\
K_\nu(y) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-y\frac{t+t^{-1}}{2}} t^{s-1}dt.
\end{aligned}$$

(Fonction de Bessel).

Par dérivation sous le signe somme, K_ν vérifie l'équation différentielle suivante (équation de Bessel) :

$$\left(y^2\frac{d^2}{dy^2} + y\frac{d}{dy} - (y^2+\nu^2)\right) K_\nu(y) = 0. \tag{1}$$

Ce qui implique :

$$\Delta(\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)e^{2i\pi nx}) = \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)e^{2i\pi nx}.$$

En particulier, pour $\nu = s - 1/2$, $a_n(y,s)e^{2i\pi nx}$ est une fonction propre de $E(s,z)$ de valeur propre $s(1-s)$, donc $E(z,s)$ vérifie 2. □

2 Développement en série de Fourier d'une forme de Maass

Si f est une forme de Maass de valeur propre λ, alors pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $f(\gamma(z)) = f(z+1) = f(z)$, donc on peut la développer sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y,s)e^{2i\pi nx}.$$

Soit $\nu \in \mathbb{C}$, tel que $\lambda = 1/4 - \nu^2$ et soit $s = \nu + 1/2$. On a alors :

Théorème 3 *([1], p. 105, [2], p.208).*

1. $a_0(y) = ay^s + by^{1-s}$.

2. Si $n \neq 0$, $a_n(y) = a_n\sqrt{y}K_u(2\pi|n|y)$.

Preuve.

1. Alors comme $\Delta(f) = s(1-s)f$, en identifiant le terme constant du développement de Fourier, on obtient $a_0''(y) + s(1-s)a_0(y) = 0$, d'où le premier point.

2. Posons $a_n(y) = \sqrt{y}k_n(2\pi|n|y)$. Alors la condition 2 implique que k_n vérifie l'équation de Bessel (1). La condition 3 implique que k_n est à croissance polynomiale. Par suite, k_n est un multiple de K_ν. □

Définition 4 *Soit f une forme de Maass. On dira que c'est une cusp-forme de Maass si le terme constant de son développement de Fourier est nul :*

$$\int_0^1 f(z+x)dx = 0, \ \forall z \in \mathbb{H}.$$

Considérons l'involution suivante :

$$\iota : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ x+iy & \longrightarrow & -x+iy. \end{array} \right.$$

Soit f une cusp-forme de Maass. On dira qu'elle est paire si $f \circ \iota = f$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_{-n} = a_n$. On dira qu'elle est impaire si $f \circ \iota = -f$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a_{-n} = -a_n$.

De manière générale, toute cusp-forme de Maass peut s'écrire de manière unique $f^+ + f^-$, avec f^+ une cusp-forme de Maass paire et f^- une cusp-forme de Maass impaire.

Supposons f une cusp-forme paire ou impaire. On pose alors :

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}.$$

(L-série associée à f).

Lemme 5 *([1], p. 106).* $a_n = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Par suite, $L(s,f)$ converge pour $Re(s) > 3/2$ (en fait, pour $Re(s) > 1$).

Proposition 6 *([1], p. 107). Soit f une cusp-forme de Maass, paire ou impaire, de valeur propre $1/4 - \nu^2$. On pose $\epsilon = 0$ si f est paire et $\epsilon = -1$ si f est impaire. On considère :*

$$\Lambda(s,f) = \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+\nu+\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu+\epsilon}{2}\right)L(s,f).$$

Alors $\Lambda(s,f) = (-1)^\epsilon \Lambda(1-s,f)$ et $\Lambda(s,f)$ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C}$.

Preuve. Si f est paire, on considère :

$$\int_0^{+\infty} f(iy) y^{s-1/2} \frac{dy}{y}.$$

Les majorations sur la fonction de Bessel impliquent que cette intégrale converge au voisinage de $+\infty$. En remarquant que $f(iy) = f\left(\frac{1}{iy}\right)$, cette intégrale converge également en 0. Si $Re(s)$ est assez grande, on remplace f par son développement en série de Fourier, puis on remarque que :

$$\int_0^{+\infty} K_\nu(y) y^s \frac{dy}{y} = 2^{s-2}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right).$$

(Changement de variables $u = ty/2$, $v = t^{-1}y/2$). Par suite :

$$\int_0^{+\infty} f(iy) y^{s-1/2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\Lambda(s,f).$$

Enfin, $f(iy) = f\left(\frac{1}{iy}\right)$ donne l'équation fonctionnelle annoncée.

Si f est impaire, on considère

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4i\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(iy) y^{s+1/2} \frac{dy}{y},$$

puis raisonnement semblable. □

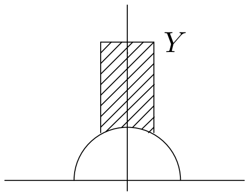
3 Espace des (cusp)-formes de Maass

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\mathcal{N}(\Gamma, \lambda)$ désigne l'espace des formes de Maass de valeur propre λ et $\mathcal{SN}(\Gamma, \lambda)$ désigne l'espace des cusp-formes de Maass de valeur propre λ.

Remarquons que si $f \in \mathcal{SN}(\Gamma, \lambda)$, alors $f \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$.

Lemme 7 *([2], p. 214). L'espace vectoriel des termes constants du développement de Fourier des éléments de $\mathcal{N}(\Gamma, \lambda)$ est de dimension* 1.

Preuve. Soient $f, g \in \mathcal{N}(\Gamma, \lambda)$, avec $f(z) = \sum a_n(y)e^{2i\pi nx}$ et $g(z) = \sum b_n(y)e^{2i\pi nx}$. Soit $Y \in \mathbb{R}$, suffisamment grand. On considère le domaine D_Y suivant :



D_Y

Par la formule de Green, en notant $\dfrac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale sur ∂D_Y, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D_Y} (f\Delta(g) - g\Delta(f))\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int_{\partial D_Y} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) ds \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (a_n(Y)b'_m(Y) - a'_n(Y)b_m(Y))e^{2i\pi(n+m)x} \right) dx + 0 \\
&\quad \text{(par identification des bords de } \partial D_Y) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(Y)b'_{-n}(Y) - a'_n(Y)b_{-n}(Y).
\end{aligned}$$

De plus, si $n \geq 0$, d'après le théorème 3, a_n et b_{-n} sont proportionnels, donc $a_n(Y)b'_{-n}(Y) - a'_n(Y)b_{-n}(Y) = 0$. Par suite, il reste $a_0(Y)b'_0(Y) - a'_0(Y)b_0(Y) = 0$ pour Y assez grand, ce qui implique que a_0 et b_0 sont proportionnels. □

Théorème 8 *([2], p. 214).*

1. *Si $Re(s) > 1/2$, alors $\mathcal{N}(\Gamma, s(1-s)) = \mathbb{C}E_s$.*
2. *$\mathcal{N}(\Gamma, 0) = \mathbb{C}$.*
3. *Si $Re(s) = 1/2$, alors $\mathcal{N}(\Gamma, s(1-s)) = \mathbb{C}E_s \oplus \mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s))$.*

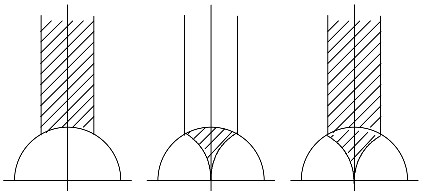
Preuve. D'après le lemme précédent, comme E_s n'est pas une cusp-forme de Maass, on a $\mathcal{N}(\Gamma, s(1-s)) = \mathbb{C}E_s \oplus \mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s))$. Par suite, il reste à montrer que si $Re(s) > 1/2$, alors $\mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s)) = (0)$.

Première étape. Si $Re(s) > 1/2$ et si $s \notin [1/2, 1]$, $\mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s)) = (0)$. Sinon, il existe une cusp-forme de Maass non nulle f, de valeur propre $s(1-s)$. Alors f est une fonction propre du laplacien Δ dans $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ de valeur propre $s(1-s)$. Or Δ est positif (voir les rappels), donc ses valeurs propres sont positives. Or $s(1-s) \notin \mathbb{R}^+$: contradiction. donc $\mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s)) = (0)$.

Deuxième étape. Si $s \in [1/2, 1]$, $\mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s)) = (0)$. Cela découle immédiatement du lemme qui va suivre, ce qui termine la preuve du théorème. □

Lemme 9 *([2], p. 226). Supposons $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{SN}(\Gamma, \lambda) \neq (0)$, alors $\lambda \geq 3\pi^2/2$.*

Preuve du lemme. Soit $f \in \mathcal{SN}(\Gamma, \lambda)$, non nulle. Alors $f \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$. On peut supposer que $< f, f >_{L^2} = 1$. Soit D le domaine fondamental, $D' = \left\{ \frac{1}{z} \,/\, z \in D \right\}$ et $D'' = D \cup D'$ (voir dessin).



D D' D''

Par invariance selon $z \longrightarrow 1/z$, on a :

$$\begin{aligned}
2\lambda &= 2 < \Delta(f), f >_{L^2} \\
&= \int_{D''} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|^2 \right) dxdy \\
&\geq \int_{D''} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 dxdy \\
&\geq \int_{|x| \leq 1/2,\, y \geq \sqrt{3}/2} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 dxdy \\
&\geq \int_{y \geq \sqrt{3}/2} \sum_{n \neq 0} 4\pi^2 n^2 |a_n(y)|^2 dy \\
&\geq 3\pi^2 \int_{y \geq \sqrt{3}/2} \sum_{n \neq 0} |a_n(y)|^2 \frac{dy}{y^2} \\
&\geq 3\pi^2 \int_{|x| \leq 1/2,\, y \geq \sqrt{3}/2} |f(z)|^2 \frac{dy}{y^2} \\
&\geq 3\pi^2 < f, f >_{L^2} \\
&\geq 3\pi^2. \ \square
\end{aligned}$$

Théorème 10 *([2], p. 227). $\mathcal{SN}(\Gamma, \lambda)$ est de dimension finie.*

Preuve. On peut supposer $Re(s) = 1/2$, i.e. $\nu = it \in i\mathbb{R}$. Supposons que les coefficients $a_n(y)$ de $f(z)$ sont nuls pour $|n| < N$. Montrons que si N est assez grand, alors f est nulle. Comme f est bornée sur $\mathbb{H}$, il existe un point $z_0 = x_0 + iy_0$ qu'on peut supposer dans D pour lequel $M = \max |f(z)|$ est atteint. Comme $a_n(y_0) = a_n \sqrt{y_0} K_{it}(2\pi |n| y_0)$, une majoration des fonctions de Bessel donne :

$$M = |f(z_0)| \leq CMe^{-\pi N y_0}.$$

Pour N assez grand, on a donc $M = 0$, donc f nulle.

Le théorème découle de ce qui précède et du fait que l'espace des coefficients $a_n(y)$ est de dimension finie. $\square$

Théorème 11 *([1], p. 108, [2], p. 228). Il existe une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini, telles que pour $s = 1/2 + i\lambda_k$, $\mathcal{SN}(\Gamma, s(1-s))$ soit non nul.*

Références

[1] Daniel Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1998.

[2] Audrey Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*, Springer-Verlag, 1985.