FONCTIONS THÉTA

GROUPE DE TRAVAIL "FORMES MODULAIRES", ANNÉE 2004-05

L'objectif de cet exposé est d'introduire les fonctions L de Dirichlet et d'expliquer comment elles permettent de construire des formes modulaires. La démonstration de l'équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions L répose sur la théorie des fonctions théta.

1. Approche historique, fonctions L de Dirichlet

Définition 1.1. Une fonction L est une série de la forme

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) n^{-s},$$

qui vérifie une certaine équation fonctionnelle, se prolonge méromorphiquement dans $\mathbb{C}$ et s'écrit comme un produit eulerien.

Exemple 1.2. *(Riemann). La fonction $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ qui converge pour $\Re s > 1$ se prolonge méromorphiquement dans $\mathbb{C}$ et possède un pôle simple en $s = 1$.*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

En plus, si l'on pose $\xi(s) = \pi^{\frac{-s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$, alors

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

Exemple 1.3. *Ramanujan en 1916 a proposé de considérer*

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s}, \tag{1.1}$$

où la fonction $\tau(n)$ est définie par $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q \prod\limits_n (1-q^n)^{24}$.

On vérifie que $\tau(1) = 1, \tau(2) = -24, \tau(3) = 252, etc.$ En outre, si $(n,m) = 1$, alors $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$. Ramanujan a conjecturé et Mordell a démontré en 1917 que cette fonction s'écrivait comme un produit eulerien:

$$L(s, \Delta) = \prod_p (1 - \tau(p) p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}.$$

La fonction $L(s,\Delta)$ de Ramanujan vérifie également une équation fonctionnelle et admet un prolongement analytique dans $\mathbb{C}$ sans pôles.
Si l'on note

$$\Lambda(s,\Delta)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\Delta),$$

on a alors

$$\Lambda(s,\Delta)=\Lambda(12-s,\Delta).$$

Le point central ici est le fait que les coefficients $\tau(n)$ sont en fait des coefficients de Fourier d'une certaine forme modulaire

$$\Delta(z)=e^{2\pi iz}\prod_{p}^{\infty}(1-e^{2\pi iz})^{24}.$$

Cette fonction, appelée *discriminant de Ramanujan*, est une forme modulaire de poids 12:

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^{12}\Delta(z), a,b,c,d\in\mathbb{Z}, ad-bc=1.$$

Poursuivons l'étude des formes modulaires à travers leur développement en série de Fourier, i.e, à travers les fonctions L correspondantes.

2. Fonctions L de Dirichlet

Soit N un entier. Un caractère de Dirichlet modulo N (ou de hauteur N) est une fonction $\chi:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ périodique de période N telle que

$$|\chi(n)|=\begin{cases}1 & \text{si}\,(n,N)=1,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases},$$

et $\chi(nm)=\chi(n)\chi(m)$. Pour construire un tel caractère, on prend un caractère du groupe abélien $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ que l'on prolonge en une fonction sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en lui assignant la valeur 0 sur toutes les classes d'équivalence qui ne sont pas premiers avec N. En composant cette fonction avec l'application canonique $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ on obtient un caractère de Dirichlet.

Il existe deux types de tels caractères. Si N_1 divise N, alors il existe deux applications canoniques $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z}$ et $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*\to(\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z})^*$. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo N_1 il induit donc un caractère de Dirichlet modulo N. On dira dans ce cas que χ est un caractère *non primitif* modulo N. Si χ n'est pas non primitif modulo N on l'appellera *primitif* et l'entier N sera appelé son *conducteur* (ou hauteur).

Ayant fixé χ un caractère de Dirichlet modulo N on peut définir une fonction L de Dirichlet associée à χ par

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}.$$

En la comparant avec la fonction ζ de Riemann on voit qu'elle converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re s > 1$.

Proposition 2.1. *Les fonctions $L(s,\chi)$ de Dirichlet s'écrivent comme un produit eulerien:*

$$L(s,\chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

En effet, notons tout d'abord que $\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_k \chi(p)^k p^{-ks}$. Si $n = \prod p_i^{k_i}$, alors le coefficient devant n^{-s} dans $\prod_p \sum_k \chi(p)^k p^{-ks}$ est égal à $\prod \chi(p_i)^{k_i} = \chi(n)$. $\square$

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif modulo N. On définit la somme de Gauss par $\tau(\chi) = \sum\limits_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i n/N}$. On montre alors la proposition suivante.

Proposition 2.2. *La somme de Gauss associée à un caractère primitif modulo N vérifie l'égalité*

$$\sum_{n \bmod N} \chi(n) e^{2\pi i n m/N} = \overline{\chi(m)} \tau(\chi),$$

et en plus $|\tau(\chi)| = \sqrt{N}$.

Ainsi, en utilisant le fait que $\tau(\bar{\chi}) = \chi(-1)\overline{\tau(\chi)}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\chi(n) &= \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} = \sum_{m \bmod N} \overline{\chi(m)} e^{2\pi i n m/N} \\
&= \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{m \bmod N} \overline{\chi(m)} e^{2\pi i n m/N}.
\end{aligned}$$

Cela veut dire que l'on peut interpoler les caractères primitifs entre les entiers. En effet, la dernière expression pour $\chi(n)$ est définie pour tout $n \in \mathbb{R}$.

En utilisant ce fait nous pouvons généraliser la formule de sommation de Poisson en la tordant par un caractère primitif.

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de hauteur N et f une fonction sur $\mathbb{R}$ continue par morceaux admettant un nombre fini de discontinuités, de variation bornée telle que $f(a) = \frac{1}{2}(\lim_{x \to a^-} f(x) +$

$\lim_{x\to a^+} f(x))$ pour tout a et telle que $|f(x)| < c_1 \min(1, x^{c_2})$ pour certaines constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 1$. On définit sa transformation de Fourier par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{2\pi i xy} dy.$$

Alors on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi(n)f(n) = \frac{\chi(-1)\tau(\chi)}{N} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\chi(n)} \hat{f}\left(\frac{n}{N}\right).$$

Maintenant nous pouvons passer à la construction des *fonctions théta*. Soit χ un caractère primitif modulo N. Supposons tout d'abord qu'il soit pair : $\chi(-1) = 1$, et posons

$$\theta_\chi(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n)e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2}\chi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)e^{-\pi n^2 t},$$

où t est un nombre complexe de partie réel positive.

Puisque $\widehat{e^{-\pi t x^2}} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi x^2}{t}}$ la formule de sommation de Poisson tordue donne:

$$\theta_\chi(t) = \frac{\tau(\chi)}{N\sqrt{t}} \theta_{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{N^2 t}\right). \tag{2.1}$$

Dans le cas où le caractère est impair, *i.e.* $\chi(-1) = -1$, posons

$$\theta_\chi(t) = \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\chi(n)e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=1}^{\infty} n\chi(n)e^{-\pi n^2 t}.$$

En utilisant de nouveau la formule de sommation de Poisson on montrer que dans ce cas là

$$\theta_\chi(t) = \frac{-i\tau(\chi)}{N^2 t^{\frac{3}{2}}} \theta_{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{N^2 t}\right). \tag{2.2}$$

Théorème 2.3. *Soit χ un caractère de Dirichlet primitif modulo N et $\varepsilon = 0, 1$ tel que $\chi(-1) = (-1)^\varepsilon$. Posons*

$$\Lambda(s, \chi) = \pi^{-(s+\varepsilon)/2} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) L(s, \chi),$$

Alors la fonction $\Lambda(s, \chi)$ admet un prolongement méromorphe pour tout $s \in \mathbb{C}$ (elle est se prolonge même en une fonction entière si $\chi \neq 1$) et elle satisfait l'equation fonctionnelle suivante:

$$\Lambda(s, \chi) = (-i)^\varepsilon \tau(\chi) N^{-s} \Lambda(1 - s, \bar{\chi}).$$

Preuve. Observons tout d'abord que $\Lambda(s,\chi)$ est la transformation de Mellin de la fonction théta correspondante:

$$\Lambda(s,\chi) = \int_0^\infty \theta_\chi(t) t^{(s+\varepsilon)/2} \frac{dt}{t}.$$

Ainsi, compte tenu de l'identité

$$\int_0^\infty e^{-\pi t n^2} t^{(s+\varepsilon)/2} \frac{dt}{t} = \pi^{-(s+\varepsilon)/2} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) n^{-s-\varepsilon}$$

et des équations fonctionnelles (2.1) et (2.2) le résultat du théorème s'en déduit facilement. $\square$

Définition 2.4. On dira qu'un caractère de Dirichlet non trivial χ modulo N est quadratique si $\chi(n) = \pm 1$ pour tout n premier avec N.

Notons que si p est un nombre premier impair alors il existe un unique caractère quadratique χ modulo p et le nombre de solutions de l'équation $x^2 \equiv a \bmod p$ est égale à $1 + \chi(a)$.

Définition 2.5. Pour tout entier a et tout nombre premier impair on définit le symbole de Legendre par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 \equiv a \bmod p \quad \text{a deux solutions,} \\ -1 & \text{si } x^2 \equiv a \bmod p \quad \text{n'a pas de solutions,} \\ 0 & \text{si } a \equiv 0 \bmod p \quad . \end{cases}$$

Si un entier b s'écrit $b = \prod_{i=1}^n p_i$ on définit le symbole de Jacobi par $\left(\frac{a}{b}\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{a}{p_i}\right)$.

On peut donc formuler la loi de réciprocité quadratique:

$$\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{a}\right).$$

Par ailleurs, on montre que $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, pour tous $(m,n) = 1$. Cela implique qu'un caractère quadratique modulo un entier positif d existe si et seulement si le nombre d est le produit des facteurs relativement premiers qui sont tous des nombres premiers impairs ou sont égaux à 4 ou 8.

Soit $D \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe un caractère quadratique χ qui soit primitif modulo $|D|$ et tel que $\chi(-1) = \mathrm{sgn} D$, alors

$$\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

pour tout n impair positif. Un entier D vérifiant ces conditions est appellé *discriminant fondamental*. Il existe donc une correspondance univoque entre les discriminants fondamentaux et les caractères primitifs quadratiques.

Enfin notons que si $\mathbb{K}$ est une extension quadratique du corps $\mathbb{Q}$ alors il existe un unique discriminant fondamental D tel que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. On montre que dans ce cas

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \zeta(s)L(s,\chi).$$

2.1. **Fonctions L tordues.** Soit $f \in S_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ une forme parabolique de poids k, telle que $f(z) = \sum_n A(n)q^n$, $q = e^{2\pi iz}$. Définissons alors

$$L(s,f) = \sum_n A(n)n^{-s}.$$

Cette fonction admet un prolongement analytique en s et

$$\Lambda(s,f) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f) = (-1)^{k/2} = \Lambda(k-s,f). \tag{2.3}$$

Par ailleurs elle s'écrit sous forme d'un produit eulerien:

$$L(s,f) = \prod_p (1 - A(p)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Le résultat réciproque est également valable. Si f est une fonction sur le demi-plan supérieur telle que ses coefficients de Fourier $A(n)$ admettent l'estimation $|A(n)| = O(n^k)$ pour un certain entier k et telle que la fonction $L(s,f)$ correspondante vérifie l'équation fonctionnelle (2.3) et se prolonge analytiquement, alors f est une forme modulaire de poids k.

Afin de définir les fonctions L tordues rappellons que l'on note

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N|c \right\}, \Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, N|c, a \equiv d \equiv 1 \bmod N \right\}.$$

On écrit $f \in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ si $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ et $f_{|\gamma} = \chi(d)f$ où χ est un caractère de Dirichlet modulo N (pas nécessairement primitif) et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Alors l'espace des formes paraboliques par rapport au sous-groupe de congruence $\Gamma_1(N)$ se décompose en somme directe (orthogonale par rapport au produit scalaire de Peterson[1]) suivant tous les caractères χ de Dirichlet modulo N :

$$S_k(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_\chi S_k(\Gamma_0(N),\chi)).$$

[1]Ce produit scalaire est défini sur l'espace des formes modulaires par : $\langle f,g\rangle = \int_{SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} f(z)\bar{g}(z)dxdy/y^2$, $z = x+iy$

Pour généraliser l'équation fonctionnelle (2.3), considérons désormais χ un caractère de Dirichlet primitif modulo D et définissons une fonction L tordue par la formule suivante

$$L(s,f,\chi) := \sum_n \chi(n)A(n)n^{-s}.$$

Supposons en plus que $f \in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$ où ψ est un certain caractère de Dirichlet modulo N. Notons que le poids k de la forme f est pair si $\psi(-1)=1$ et il est impair sinon. Considérons la matrice $w_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$ qui normalise le groupe $\Gamma_0(N)$, i.e. si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, alors $w_N \gamma w_N^{-1}$ appartient aussi au groupe $\Gamma_0(N)$, si $N|c$ et $ad-bc=1$ on a $\psi(d)=\overline{\psi(a)}$. Cela implique que si $f \in S_k(\Gamma_0(N),\psi)$, alors

$$f_{|w_N|\gamma} = f|w_N\gamma w_N^{-1}|w_N = \overline{\psi(d)} f_{|w_N}.$$

Ainsi la forme $g := f_{|w_N}$ appartient à $S_k(\Gamma_0(N),\bar\psi)$.

Soient $A(n)$ et $B(n)$ les coefficients de Fourier des fonctions f et g respectivement, posons comme précédemment

$$L(s,f) = \sum_n A(n)n^{-s}, \quad L(s,g) = \sum_n B(n)n^{-1}.$$

On montre alors que

$$\Lambda(s,f) = i^k N^{-s+k/2}\Lambda(k-s,g).$$

Plus généralement, considérons $L(s,f\chi)$ et $L(s,g,\bar\chi)$ et normalisons les comme suit:

$$\Lambda(s,f,\chi) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\text{Ł}(s,f,\chi), \quad \Lambda(s,g,\bar\chi) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,g\bar\chi).$$

On montre alors que

$$\Lambda(s,f,\chi) = i^k\chi(N)\psi(D)\frac{\tau(\chi)^2}{D}(D^2N)^{-s+k/2}\Lambda(k-s,g,\bar\chi). \tag{2.4}$$

où χ est primitif modulo D et ψ un caractère modulo N avec D et N des entiers premiers entre eux. Cette équation se réduit à l'équation précédente pour $D=1$ (i.e $\chi=1$).

Le résultat réciproque est connu sous le nom du théorème de A.Weil:

Théorème 2.6. *Soit N un entier positif et ψ un caractère de Dirichlet modulo N pas nécessairement primitif. Supposons que $A(n)$ et $B(n)$ sont deux suites de nombres complexes telles que $|A(n)|,|B(n)| = O(n^K)$ pour un certain K suffisamment grand. Si D est relativement* *premier avec N et χ est un caractère de Dirichlet primitif modulo D, posons*

$$L_1(s,\chi) = \sum_n \chi(n)A(n)n^{-s}, \text{ et } L_2(s,\bar{\chi}) = \sum_n \overline{\chi(n)}B(n)n^{-s}$$

et

$$\Lambda_1(s,\chi) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_1(s,\chi), \text{ et } \Lambda_2(s,\bar{\chi}) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_2(s,\bar{\chi}).$$

Soit S un sous ensemble fini des nombres premiers contenant ceux qui divisent N.

Supposons que $\Lambda_1(s,\chi)$ et $\Lambda_2(s,\bar{\chi})$ admettent un prolongement analytique pour tout s, sont bornées dans chaque bande verticale $\sigma_1 \leq \Re(s) \leq \sigma_2$ et satisfont l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_1(s,\chi) = i^k\chi(N)\psi(D)\frac{\tau(\chi)^2}{D}(D^2N)^{-s+k/2}\Lambda_2(k-s,\bar{\chi}),$$

à condition que la hauteur D du caractère χ soit égale à 1 ou à un nombre premier n'appartenant pas au sous-ensemble S.

Alors $f(z) = \sum_n A(n)q^n$ est une forme modulaire de poids K et plus précisément $f \in M_K(\Gamma_0(N),\psi)$.

Les généralisations des fonctions théta sur les domaines de Siegel, leur torsion par des polynômes homogènes, le lien avec les fonctions de Jacobi, leur rôle dans l'étude de la représentation métaplectique et la dualité de Howe seront développés dans un exposé ultérieur.