Représentations de $GL_n(\mathbb{R})$

1 Représentations de $GL_n(\mathbb{R})$, représentations de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$

Définition 1 Soit G un groupe de Lie. Une représentation de G est un couple $(\pi, \mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et $\pi : G \longrightarrow End(\mathcal{H})$ est un morphisme de groupes tel que l'application suivante soit continue :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ (g, u) & \longrightarrow & \pi(g).u. \end{array} \right.$$

On dira que π est unitaire si, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $g \in G$:

$$< \pi(g).u, \pi(g).v > = < u, v > .$$

Par la suite, on désignera par G le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{R})^+$ et par $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie : dans les deux cas, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Les représentations de G considérées ne seront pas nécessairement unitaires.

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de $GL_n(\mathbb{R})$. Dans cette première section, nous définissons un sous-espace de $\mathcal{H}$ sur lequel $\mathfrak{g}$ agit.

Définition 2 Soit $f \in \mathcal{H}$. On dira que f est C^1 si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'élément suivant existe :

$$\pi(X)f = X.f = \frac{d}{dt}\pi\left(e^{tX}\right) f_{|t=0} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\pi\left(e^{tX}\right) f - f}{t}. \tag{1}$$

Par récurrence, on dira que f est C^k si f est C^1 et si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $X.f$ est C^{k-1}. Enfin, on dira que $f \in C^\infty$ si $f \in C^k$ pour tout k. On note $\mathcal{H}^\infty$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{H}$ qui sont C^∞.

Lemme 3 *([1], page 188). L'espace $\mathcal{H}^\infty$ est G-invariant.*

Preuve. Pour $X \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $f \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} X.(\pi(g)f) &= \lim_{t \longrightarrow O} \frac{\pi(e^{tX}g)f - \pi(g)f}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow O} \pi(g).\frac{\pi(g^{-1}e^{tX}g)f - f}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow O} \pi(g).\frac{\pi(e^{tAd(g)X})f - f}{t} \\ &= \pi(g).((Ad(g)X).f). \end{aligned}$$

Par suite, $X.(\pi(g)f)$ existe, donc $\pi(g)f$ est C^1. Par récurrence, $\pi(g)f$ est C^∞. □

Lemme 4 *([1], page 188). Soit f une fonction sur $G = GL_n(\mathbb{R})^+$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on pose :*

$$dXf : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & \frac{d}{dt} f(ge^{tX})_{|t=0}. \end{array} \right.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est lisse.*
2. *f est continue et pour tous $X_1, \ldots, X_r \in X$, $(dX_1 \circ \ldots \circ dX_R)(f)$ existe et est continue.*

Preuve. Soit $X_{i,j}$ la matrice ayant tous ses coeficients nuls, sauf le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne, qui vaut 1. Un calcul simple montre que :

$$(dX_{i,j}f)(Id) = \frac{\partial f}{\partial g_{i,j}}(Id),$$

où les $g_{k,l}$ sont les coordonnées usuelles sur G. Par suite, on retrouve la condition habituelle sur les dérivées partielles, du moins au voisinage de Id. Par translation, on l'obtient en tout point de G. □

Lemme 5 *([1], page 150). Soit $X, Y \in \mathfrak{g}$. Alors $dX \circ dY - dY \circ dX = d[X,Y]$ sur $C^\infty(GL_n(\mathbb{R})^+)$.*

Preuve. Dans $GL_n(\mathbb{R})^+$, e^{tX} et $Id + tX$ sont tangents au voisinage de $t = 0$. Par suite :

$$dXf(g) = \frac{d}{dt} f(g(Id + tX))_{|t=0}.$$

Fixons $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$. Pour X proche de 0, posons :

$$f(g(Id + X)) = c_0 + c_1(X) + B(X,X) + R(X),$$

avec $R(X)$ de l'ordre de X^3. Par suite :

$$\begin{array}{rcl} dXf(g) & = & c_1(X), \\ (dX \circ dYf)(g) & = & c_1(XY) + 2B(X,Y). \end{array}$$

Comme B est symétrique, le résultat est immédiat. □

Proposition 6 *([1], page 189). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de $G = GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{R})^+$. Alors l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{H}^\infty$ définie par (1) est une action d'algèbre de Lie :*

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X,Y].f.$$

Preuve. On peut se restreindre au cas où $G = GL_n(\mathbb{R})^+$, cela ne modifiant pas $\mathcal{H}^\infty$. Il suffit de montrer que pour tous $X, Y \in g$, $f \in \mathcal{H}^\infty$, $\phi \in \mathcal{H}$:

$$< X.(Y.f) - Y.(X.f), \phi > = < [X,Y].f, \phi > .$$

Pour toute $f \in \mathcal{H}^\infty$, considérons la fonction suivante :

$$Lf : \left\{ \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & Lf(g) = < \pi(g)f, \phi > . \end{array} \right.$$

Il suffit alors de démontrer que $L(X.(Y.f) - Y.(X.f)) = L([X,Y].f)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} ((dX \circ L)f)(g) & = & \frac{d}{dt}(Lf)(ge^{tX})_{|t=0} \\ & = & \frac{d}{dt} < \pi(g)\pi(e^{tX})f, \phi >_{|t=0} \\ & = & < \pi(g)X.f, \phi > \\ & = & ((L \circ X)f)(g). \end{array}$$

Par suite, $dX_1 \circ \ldots dX_r(Lf)$ existe : par le lemme 4, Lf est lisse, donc $L : \mathcal{H}^\infty \longrightarrow C^\infty(G)$. Par le lemme 5 et le calcul précédent :

$$\begin{array}{rcl} L(X.(Y.f) - Y.(X.f)) & = & (dX \circ dY - dY \circ dX)L(f) \\ & = & d[X,Y]L(f) \\ & = & L([X,Y].f). \ \square \end{array}$$

Définition 7 *(Action de $C_c^\infty(G)$ sur $\mathcal{H}$).* Soient $\phi \in C_c^\infty(G)$, $f \in \mathcal{H}$. On pose :

$$\pi(\phi)f = \int_G \phi(g)\pi(g)f dg.$$

Ceci définit une action de $C_c^\infty(G)$ (munie de la convolution) dans $\mathcal{H}$.

Proposition 8 *([1], page 190). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de $G = GL_n(\mathbb{R})$ ou $G = GL_n(\mathbb{R})^+$.*

1. *Si $\phi \in C_c^\infty(G)$, $f \in \mathcal{H}$, alors $\pi(\phi)(f) \in \mathcal{H}^\infty$.*
2. *$\mathcal{H}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Preuve.
1. On a :

$$\begin{aligned} X.\pi(\phi)f &= \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})\pi(\phi)f_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\int_G \phi(g)\pi(e^{tX}g)f dg\right)_{|t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\int_G \phi(e^{-tX}g)\pi(g)f dg\right)_{|t=0} \\ &= \int_G \phi_X(g)\pi(g)f dg, \end{aligned}$$

avec :

$$\phi_X(g) = \frac{d}{dt}\phi(e^{-tX}g)_{|t=0}.$$

Par suite, $\pi(\phi)f$ est C^1 et $X.\pi(\phi)f = \pi(\phi_X)f$. Par récurrence, $\pi(\phi)f$ est C^∞.

2. Soit $\epsilon > 0$. Comme $(g, f) \longrightarrow \pi(g).f$ est continue, il existe un voisinage U de Id dans G tel que $|\pi(g)f - f| < \epsilon$ sur U. Soit $\phi \in C_c^\infty(G)$, positive, à support dans U, d'intégrale sur G égale à 1. On a alors facilement $|\pi(\phi)f - f| < \epsilon$ et $\pi(\phi)f \in \mathcal{H}^\infty$. □

2 Représentations de $GL_n(\mathbb{R})$, représentations de $O_n(\mathbb{R})$

Lemme 9 *([1], page 190). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ représentation d'un groupe compact K. Alors il existe un produit hermitien sur $\mathcal{H}$, induisant la topologie de $\mathcal{H}$, tel que cette représentation soit unitaire.*

Preuve. Soit $<,>_1$ le produit hermitien de $\mathcal{H}$. Pour tous $v, w \in \mathcal{H}$, on pose :

$$< v, w >= \int_K < \pi(k)v, \pi(k)w >_1 dk.$$

Alors $<,>$ est un produit hermitien rendant $(\pi, \mathcal{H})$ unitaire.

L'application $h \longrightarrow< \pi(h)v, \pi(h)v >_1$ de K dans $\mathbb{C}$ est continue. Donc, pour v fixé, la famille $(||\pi(k)v||_1)_{k\in K}$ est bornée. Par le théorème de Banach-Steinhaus, la famille $(||\pi(k)||_1)_{k\in K}$ est bornée. Donc il existe $C > 0$, $||\pi(k)v||_1 \leq C||v||_1$. Comme $\pi(k)$ est inversible, d'inverse dans K, $||\pi(k)v||_1 \geq \frac{1}{C}||v||_1$. En intégrant :

$$\frac{1}{C^2}||v||_1^2 \leq ||v||^2 \leq C^2||v||_1^2.$$

Donc $<,>$ induit la topologie de $\mathcal{H}$. □

Définition 10

1. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation d'un groupe G. les coefficients matriciels de cette représentation sont les fonctions de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{lll} G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longrightarrow & < \pi(g)x, y >, \end{array} \right.$$

où $x, y \in \mathcal{H}$.

2. Soit $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ deux représentations de G. Un morphisme de représentations de $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ est une application linéaire continue $L : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ vérifiant, pour tout $g \in G$, $L \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ L$.

Proposition 11 *([1], page 191). Soient K un groupe compact, $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ deux représentations unitaires de K. S'il existe des coefficients matriciels f_1 et f_2 de π_1 et π_2 non orthogonaux dans $L^2(K)$, alors il existe un morphisme de représentations non nul $L : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$.*

Preuve. Soient $x_1, y_1 \in \mathcal{H}_1$, $x_2, y_2 \in \mathcal{H}_2$, tels que :

$$I = \int_K \overline{< \pi_1(k)x_1, y_1 >} < \pi_2(k)x_2, y_2 > dk \neq 0.$$

On considère :

$$L : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & \mathcal{H}_2 \\ v & \longrightarrow & \int_K < \pi_1(g)v, y_1 > \pi_2(g^{-1})y_2 dg. \end{array} \right.$$

Le changement de variable $g \longrightarrow gh$ montre que $\pi_2(h) \circ L = L \circ \pi_1(h)$. De plus, comme π_2 est unitaire : $< v_2, L(v_1) >= I \neq 0$. Donc L est non nul. □

Théorème 12 *(Théorème de Peter-Weyl, [1], page 192). Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{C})$.*

1. *Les coefficients matriciels des représentations unitaires de dimension finie de K sont denses dans $C(K)$ (pour la norme $||.||_\infty$) et dans $L^p(K)$ pour $1 \leq p < \infty$.*
2. *Toute représentation unitaire irréductible de K est de dimension finie.*
3. *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de K. Alors $\mathcal{H}$ se décompose en somme directe hilbertienne de représentations irréductibles unitaires de K.*

Preuve. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ se plonge dans $GL_{2n}(\mathbb{R})$, on peut supposer $K \subseteq GL_n(\mathbb{R})$, quitte à changer n.

1. Montrons que toute fonction polynomiale sur K est un coefficient matriciel d'une représentation unitaire de dimension finie de K. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit E_r l'espace des fonctions polynomiales de degré $\leq r$ sur K. Alors K agit sur E_r par $(\pi(k)f)(x) = f(xk)$. Par le lemme 9, on peut supposer cette représentation unitaire, en choisissant bien le produit hilbertien $<,>$ de E_r. Comme E_r est de dimension finie, il existe $f_0 \in E_r$, tel que $f(1) =< f, f_0 >$ pour toute $f \in E_r$. Alors pour toute $f \in E_r$, $f(g) = \pi(g)f(1) =< \pi(g)f, f_0 >$, donc f est un coefficient matriciel d'une représentation unitaire de dimension finie de K. Le théorème de Stone-Weierstrass induit alors le premier point.

2. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire non nulle de K. Montrons que $\mathcal{H}$ admet un sous-espace K-invariant de dimension finie, ce qui implique immédiatement le point 2. Soit ϕ un coefficient matriciel non nul de π. On peut approcher ϕ dans $L^2(K)$ par une fonction polynomiale, donc il existe un polynôme P non orthogonal à ϕ. Soit r le degré de P. En utilisant les notations de la preuve du premier point, par la proposition 11, il existe un morphisme de représentations non nul $L : E_r \longrightarrow \mathcal{H}$. Alors son image convient.

3. Par le lemme de Zorn. □

Remarque. Le théorème de Peter-Weyl reste vrai si K n'est pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Appliquons ces résultats à $G = GL_n(\mathbb{R})$, avec $K = O_n(\mathbb{R})$ ou $G = GL_n(\mathbb{R})^+$, avec $K = O_n(\mathbb{R})^+$. Dans les deux cas, K est un sous-groupe compact maximal de G. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G. Par le lemme 9, on peut supposer $\pi_{|K}$ unitaire. Par le théorème de Peter-Weyl, $\mathcal{H}$ se décompose en somme directe hilbertienne de représentations unitaires de K irréductibles de dimension finie.

Définition 13 $(\pi, \mathcal{H})$ est dite admissible si si chaque classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de K n'apparait qu'un nombre fini de fois dans une (toute) décomposition de $(\pi_{|K}, \mathcal{H})$.

Remarque. On peut montrer que toute représentation unitaire irréductible de G est admissible.

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G. Soit $\mathcal{H}^K$ la composante isotypique triviale de $(\pi_{|K}, \mathcal{H})$:

$$\mathcal{H}^K = \{f \in \mathcal{H} \,/\, \pi(k)f = f, \forall k \in K\}.$$

Alors $\mathcal{H}^K$ est stable sous l'action de $C_c^\infty(K \setminus G/K)$ (définition 7). Plus précisément, si $f \in \mathcal{H}$, $\phi \in C_c^\infty(K \setminus G/K)$, pour tout $k \in K$:

$$\pi(k)\pi(\phi)f = \int_G \phi(g)\pi(kg)fdg = \int_G \phi(k^{-1}g)\pi(g)fdg = \pi(\phi)f.$$

Théorème 14 *(Unicité du vecteur K-fixé, [1], page 194). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation irréductible unitaire de G. Supposons que pour tout $\phi \in C_c^\infty(K \setminus G/K)$, $\pi(\phi)$ est un opérateur compact de $\mathcal{H}^K$. Alors $dim(\mathcal{H}^K) \leq 1$.*

Preuve. Supposons $\mathcal{H}^K$ non nul. Montrons que $\mathcal{H}^K$ est une représentation irréductible de $C_c^\infty(K \setminus G/K)$. Soit $(0) \subsetneq V_0 \subsetneq \mathcal{H}^K$ une sous-représentation non triviale. Comme V_0 est fermé, il existe $x \in \mathcal{H}^K$, non nul, orthogonal à V_0. Considérons la clôture X du sous-espace suivant :

$$Vect(\pi(\phi)x \,/\, \phi \in C_c^\infty(G)).$$

X est G-stable. Montrons que X est orthogonal à V_0. Soit $\phi \in C_c^\infty(G)$, $v \in V_0$. En normalisant la mesure de Haar de G de sorte que $\mu(K) = 1$, comme $x, v \in \mathcal{H}^K$:

$$\begin{aligned}
< \pi(\phi)x, v > &= \int_G \phi(g) < \pi(g)x, v > dg \\
&= \int_{G \times K \times K} \phi(g) < \pi(g)\pi(k_1^{-1})x, \pi(k_2)v > dgdk_1dk_2 \\
&= \int_{G \times K \times K} \phi(g) < x, \pi(k_1g^{-1}k_2)v > dgdk_1dk_2 \\
&= \int_G \phi_0(g) < x, \pi(g)v > dg,
\end{aligned}$$

avec :

$$\phi_0(g) = \int_{K \times K} \phi(k_1g^{-1}k_2)dk_1dk_2.$$

Comme $\phi_0 \in C_c^\infty(K \setminus G/K)$, $< \pi(\phi)x, v >=< x, \pi(\phi_0)v >= 0$ car $x \in V_0^\perp$.

Alors X est une sous-représentation de $(\pi, \mathcal{H})$, non nulle car contenant x, non égale à $\mathcal{H}$ car orthogonale à V_0 : ceci contredit l'irréductibilité de $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{H}^K$ est une représentation irréductible de $C_c^\infty(K \setminus G/K)$.

Montrons ensuite que $\mathcal{H}^K$ est de dimension finie. Soit $x \in \mathcal{H}^K$, non nul. On montre qu'il existe $\phi \in C_c^\infty(K \setminus G/K)$, tel que $\pi(\phi)$ soit autoadjoint et $\pi(\phi)x \neq 0$. Comme $\pi(\phi)$ est compact, $\pi(\phi)$ admet une valeur propre λ sur $\mathcal{H}^K$. Soit L le sous-espace propre associé ; L est de dimension finie. Comme $C_c^\infty(K \setminus G/K)$ est commutative (pour la convolution), L est stable sous l'action de $C_c^\infty(K \setminus G/K)$. Par irréductibilité, $L = \mathcal{H}^K$, qui est donc de dimension finie.

Comme $C_c^\infty(K \setminus G/K)$ est commutative (pour la convolution), les opérateurs $\pi(\phi)$, $\phi \in C_c^\infty(K \setminus G/K)$, admettent un vecteur propre commun. On a donc un sous-espace de $\mathcal{H}^K$ de dimension 1, stable par les $\pi(\phi)$: par irréducibilité, il s'agit de $\mathcal{H}^K$, qui est donc de dimension 1. □

Remarque. En admettant que toute représentation irréductible unitaire de G est admissible, alors on sait que $dim(\mathcal{H}^K)$ est finie, donc la condition de compacité est inutile.

Corollaire 15 *([1], page 195). Si $(\pi, \mathcal{H})$ est irréductible, unitaire et admissible, alors $dim(\mathcal{H}^K) = 0$ ou 1.*

(Car alors $\mathcal{H}^K$ est de dimension finie et tout opérateur sur $\mathcal{H}^K$ est compact).

Théorème 16 *([1], page 196). Considérons $G = GL_2(\mathbb{R})^+$ et $K = O_2(\mathbb{R})^+$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation irréductible unitaire de G. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons :*

$$\mathcal{H}_k = \left\{ v \in \mathcal{H} \;/\; \pi \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} v = e^{ik\theta} v, \forall \theta \right\}$$

Alors $\mathcal{H}$ est la somme directe hilbertienne des $\mathcal{H}_k$; de plus, $\mathcal{H}_k$ est de dimension 0 ou 1.

Preuve. Semblable à celle du théorème 14, car pour tout caractère σ de K, $C_c^\infty(K \setminus G/K, \sigma)$ est commutative. □

Corollaire 17 *([1], page 196). Considérons $G = GL_2(\mathbb{R})^+$ et $K = O_2(\mathbb{R})^+$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Soit Γ un sous-groupe discret de G, contenant $-Id$, tel que $\Gamma \setminus \mathcal{H}$ soit compact. Soit χ un caractère unitaire de Γ. Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une sous-représentation irréductible de $L^2(\Gamma \setminus G, \chi)$. Alors $\mathcal{H}_k$ est de dimension inférieure ou égale à 1. En particulier, π est admissible.*

(On sait qu'alors les opérateurs $\pi(\phi)$ sont de Hilbert-Schmidt, donc compacts).

3 Vecteurs K-finis

Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$, avec $K = O_n(\mathbb{R})$, ou $G = GL_n(\mathbb{R})^+$, avec $K = O_n(\mathbb{R})^+$. On note $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K (il s'agit dans les deux cas de l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques).

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G, telle que $\pi_{|K}$ soit unitaire. Soit σ une classe d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles de K. Soit $\mathcal{H}(\sigma)$ la composante isotypique correspondante de $\mathcal{H}$. Alors $\mathcal{H}$ est la somme directe hilbertienne des $\mathcal{H}(\sigma)$. On note $\mathcal{H}_{fin}$ la somme directe algébrique des $\mathcal{H}(\sigma)$. Les éléments de $\mathcal{H}_{fin}$ sont appelés "vecteurs K-finis".

Proposition 18 *([1], page 197). Soit $f \in \mathcal{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est K-fini.*
2. *$Vect(\pi(k)f \;/\; k \in K)$ est de dimension finie.*
3. *$Vect(X.f \;/\; X \in \mathfrak{k})$ est de dimension finie.*

Proposition 19 *([1], page 197). Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation irréductible de G. Alors les vecteurs K-finis sont lisses ($\mathcal{H}_{fin} \subseteq \mathcal{H}^\infty$). De plus, $\mathcal{H}_{fin}$ est dense dans $\mathcal{H}$ et est stable sous l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{H}^\infty$.*

Preuve. Posons $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{fin} \cap \mathcal{H}^\infty$. Montrons que $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$. Soit $f \in \mathcal{H}$. Soient U un voisinage de Id dans G, $\epsilon > 0$. Soit ϕ, lisse , positive, à support dans KU, d'intégrale 1, telle que :

$$\int_{G-U} |\phi(g)| dg < \epsilon.$$

Pour U, ϵ bien choisi, $\pi(\phi)f$ sera proche de f et dans $\mathcal{H}^\infty$.

Montrons que l'on peut choisir ϕ de sorte que $\pi(\phi)$ soit K-fini. Soit U_1 un voisinage de Id dans G, V un voisinage de Id dans K, tels que $VU_1 \subseteq U$. Soit ϕ_1, lisse, à support dans

U_1, d'intégrale 1. Par le théorème de Peter-Weyl, il existe un coefficient matriciel ϕ_0 d'une représentation unitaire de dimension finie de K, d'intégrale 1, et tel que :

$$\int_{K-V} |\phi_0| < \epsilon.$$

Posons :

$$\phi(g) = \int_K \phi_0(k)\phi_1(k^{-1}g)dk.$$

Alors $supp(\phi) \subseteq KU_1 \subseteq KU$. De plus, si $g \notin U$, alors $g \notin VU_1$, donc si $\phi_1(k^{-1}g) \neq 0$, alors $k^{-1}g \in U_1$, donc $k \notin V$, d'où $\phi(g) \leq \epsilon$ si $g \notin U$. Donc ce ϕ convient pour approcher f, avec $\pi(\phi)f \in \mathcal{H}^\infty$.

Montrons que $\pi(\phi)f$ est K-fini. Soit (ρ, R) une représentation de dimension finie unitaire dont ϕ_0 est un coefficient matriciel : $\phi_0(k) =< \rho(k)\xi, \eta >$. Si $k_1 \in K$:

$$\begin{aligned}
\phi(k_1^{-1}g) &= \int_K \phi_0(k)\phi_1(k^{-1}k_1^{-1}g)dk \\
&= \int_K < \rho(k)\xi, \eta > \phi_1(k^{-1}k_1^{-1}g)dk \\
&= \int_K < \rho(k_1^{-1})\rho(k)\xi, \eta > \phi_1(k^{-1}g)dk \\
&= \int_K < \rho(k)\xi, \rho(k_1)\eta > \phi_1(k^{-1}g)dk.
\end{aligned}$$

Donc $\phi(k_1^{-1}g)$ est dans l'espace engendré par les fonctions de la forme :

$$g \longrightarrow \int_K < \rho(k)\xi, \eta' > \phi_1(k^{-1}g)gk,$$

où η' parcourt R. Cet espace est de dimension finie, donc d'après la proposition 18, comme l'espace engendré par les $\pi(k)\pi(\phi)f$ est de dimension finie, $\pi(\phi)f$ est K-fini. Donc $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Montrons que $\mathcal{H}_{fin}$ est inclus dans $\mathcal{H}^\infty$. Par le lemme 3, $\mathcal{H}_0$ est K-stable, donc se décompose en somme de $\mathcal{H}_0(\sigma)$, avec $\mathcal{H}_0(\sigma) \subseteq \mathcal{H}(\sigma)$. Comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$, somme directe hilbertienne des $\mathcal{H}(\sigma)$, nécessairement $\mathcal{H}_0(\sigma) = \mathcal{H}(\sigma)$, donc $\mathcal{H}_{fin} \subseteq \mathcal{H}^\infty$.

Montrons que $\mathcal{H}_{fin}$ est $\mathfrak{g}$-stable. Soit $f \in \mathcal{H}_{fin}$ et soit R un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{H}$ contenant f et $\mathfrak{k}$-stable (proposition 18). Considérons :

$$R_1 = Vect(Y.v \,/\, Y \in \mathfrak{g},\ v \in R).$$

Alors R_1 est de dimension finie. De plus, pour tout $X \in \mathfrak{k}$:

$$X.(Y.v) = Y.(\underbrace{X.v}_{\in R}) + [X, Y].v \in R_1,$$

donc tous les éléments de R_1 sont K-finis (proposition 18). En particulier, $Y.f \in \mathcal{H}_{fin}$ si $Y \in \mathfrak{g}$. □

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation de G. Pour tout $X \in g$, $g \in G$, $f \in \mathcal{H}^\infty$:

$$\pi(g)\pi(X)\pi(g^{-1}) = \pi(gXg^{-1})f = (Ad(g).X).f.$$

Définition 20 Soient G un groupe de Lie réductif, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, K un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Un $(\mathfrak{g}, K)$-module est un espace vectoriel V sur lequel agit $\mathfrak{g}$ et K avec :

1. V se décompose en somme directe algébrique de K-modules irréductibles de dimension finie.
2. $\forall k \in K$, $X \in \mathfrak{g}$, $f \in V$, $\pi(g)\pi(X)\pi(g^{-1})f = (Ad(g).X).f$.
3. $\forall X \in \mathcal{H}$, $f \in V$, $\pi(X)f = \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})f_{|t=0}$.

Par exemple, si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation admissible de $G = GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{R})^+$, avec $K = O_n(\mathbb{R})$ ou $O_n(\mathbb{R})^+$, alors $\mathcal{H}_{fin}$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module. On dira que deux représentations $(\pi, \mathcal{H})$ et $(\pi', \mathcal{H}')$ sont infinitésimalement équivalentes si $\mathcal{H}_{fin}$ et $\mathcal{H}'_{fin}$ sont des $(\mathfrak{g}, K)$-modules isomorphes. Si $(\pi, \mathcal{H})$ et $(\pi, \mathcal{H}')$ sont isomorphes, elles sont infinitésimalement équivalentes, mais la réciproque est fausse.

Références

[1] Daniel Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1998.